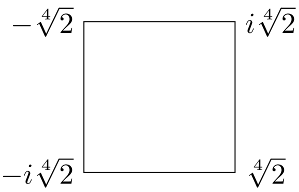
EPFL - Printemps 2025 | Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps | **Exercices**
Série 11

Exercice 1.
Dans les cas suivants, montrez que $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ est le corps de décomposition d'un polynôme, puis calculez $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q})$, et calculez le polynôme minimal de $\alpha, \alpha + \beta, \alpha \cdot \beta$ et α^{-1}. Pour calculer les polynômes minimaux, on calculera l'orbite de ces éléments par G.

1. $\alpha = \sqrt{3}, \beta = \sqrt{7}$
2. $\alpha = e^{(i\pi/3)}, \beta = -1$
3. $\alpha = e^{(i\pi/3)}, \beta = i$
4. $\alpha = e^{(i\pi/6)}, \beta = i$.

Exercice 2. 1. Montrez que $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ est le corps de décomposition de $x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

2. Montrez qu'il existe $r, s \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tel que
   (a) $r(\sqrt[4]{2}) = i\sqrt[4]{2}$ et $r(i) = i$,
   (b) $s(\sqrt[4]{2}) = -\sqrt[4]{2}$ et $s(i) = -i$.
3. Déduire que si l'on nomme les sommets d'un carré selon les racines de $x^4 - 2$ comme ci-dessous



   le groupe $\mathrm{Gal}(K, \mathbb{Q})$ est isomorphe au groupe D_8 des symétries du carré.
4. Donner un élément $\alpha \in K$ avec $\mathbb{Q}(\alpha) = K$.
5. Pour tous les éléments suivants de K

$$3 + \sqrt{2}, \quad i + \sqrt{2}, \quad 1 + \sqrt[4]{2} \quad 1 + i\sqrt[4]{2}, \quad \sqrt[4]{2}(1+i) \quad \sqrt[4]{2}(1-i)$$

   déterminer,
   (a) l'orbite de ces éléments par $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$,
   (b) leur polynôme minimal,
   (c) le stabilisateur de ces éléments dans $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.*

Exercice 3.
Soit $f = x^3 + ax + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ avec $a > 0$, $a \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que f est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que f a une racine réelle, mais pas trois.
3. Soit $K = \mathbb{Q}[x]/(f)$. Montrer que $K/\mathbb{Q}$ est une extension de degré 3 qui n'est pas Galoisienne.
4. Soit L le corps de décomposition de f sur $\mathbb{Q}$. Montrer que $\mathrm{Gal}(L/Q) \cong S_3$.

*C'est à dire si α est un tel élément, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\alpha))$.

Exercice 4.
Soit K un corps de caractéristique $p > 0$, et $\alpha \neq 0 \in K$ tel que le pôlynome $f(x) = x^p - x + \alpha \in K[x]$ n'a pas de racines dans K. Soit L le corps de decomposition de f, et $G = \mathrm{Gal}(L/K)$.

1. Montrez que $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. *Indication: Si β est une racine de f, alors $\beta + \gamma$ l'est aussi, pour tout $\gamma \in \mathbb{F}_p$.*

2. Montrez que le pôlynome f est irréductible sur K.

3. Considérons $K = \mathbb{F}_p(t)$. Montrez que le pôlynome $f(x) = x^p - x + t \in K[x]$ n'a pas de racines dans K.

4. Soit K et f comme dans le point précédent. Donnez le corps de décomposition de f sur K.

Exercice 5.
Soit $K \subseteq L \subseteq E$ une extension algébrique tel que $K \subseteq L$ et $L \subseteq E$ sont Galois. Montrer que $K \subseteq E$ n'est pas forcément Galois.
Indication. Envisager les extensions $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{2}})$ ou $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.