EPFL - Printemps 2025	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 10	

Exercice 1. 1. Montrez que $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ est une $\mathbb{Q}$ base de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

2. Écrivez la matrice de la multiplication par

$$1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4},$$

vue comme application linéaire $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Calculez le polynôme caractéristique de cette matrice et déduisez en le polynôme minimal de l'élément ci-dessus.

Exercice 2.
Décrivez le groupe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ dans les cas suivants: $K = \mathbb{Q}(i), \mathbb{Q}(\sqrt{7}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{Q}(\xi)$ où $\xi = e^{2i\pi/3}$.

Exercice 3.
Soit $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Considérons

$$\mathbb{Q}(\xi, \sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{C},$$

un corps de décomposition de $x^3 - 2$. (Voir série 8, exercice 4).

On attire l'attention sur le point (3) de la Proposition 4.6.4. Que le groupe $\mathrm{Gal}(L/K)$ *agit transitivement sur les racines d'un polynôme minimal est un théorème* d'existence. *En effet étant donné des racines* α_1, α_2 *d'un polynôme minimal, la transitivité signifie qu'il existe* $\phi \in \mathrm{Gal}(L/K)$ *tel que* $\phi(\alpha_1) = \alpha_2$.

1. Montrez qu'il existe $\phi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ tel que $\phi(\xi) = \xi$ et $\phi(\sqrt[3]{2}) = \xi\sqrt[3]{2}$. Quel est l'ordre de ϕ ?

2. Montrez qu'il existe $\psi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ avec $\psi(\xi\sqrt[3]{2}) = \xi^2\sqrt[3]{2}$ et $\psi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$. Quel est l'ordre de ψ ?

3. En étudiant l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi, \sqrt[3]{2})$ sur les racines de x^3-2, déduisez que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi, \sqrt[3]{2}) \cong S_3$.

4. Raisonnez comme au point précédent pour calculer les groupes de Galois des extensions $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

Exercice 4.
Soit K un corps et L un corps de décomposition généré par des éléments séparables. En utilisant la Proposition 4.6.4 du cours montrez que si $\alpha \in L$ alors si l'orbite de α par l'action $\mathrm{Gal}(L/K)$ est de taille $[L : K]$ on a $L = K(\alpha)$.

Calculez des éléments primitifs pour chacune des extensions apparaissant dans l'exercice 3 en utilisant ce principe.

Exercice 5 (Corps imparfaits)**.** (a) Soit K un corps de caractéristique $p > 0$ et soit $\alpha \in K \backslash K^p$. Montrer que $x^p - \alpha \in K[x]$ est irréductible.

Soit $L = (\mathbb{F}_p(x))[y]/(y^2 - x(x-1)(x+1))$.

(b) Montrer que L est un corps.

(c) Si $p \neq 2$, montrer que L n'est pas parfait.

(d) Si $p = 2$, montrer que L n'est pas parfait.

Exercice 6.
Soit $p > 0$ un nombre premier, posons $L = \mathbb{F}_p(x, y)$ et $K = \mathbb{F}_p(x^p, y^p) \subseteq L$.

1. Calculer le degré de l'extension $K \subseteq L$.

2. Calculer $\mathrm{Gal}(L/K)$.
3. Montrer que cette extension ne peut pas être générée par un seul élément.
4. Montrer que pour tout $\gamma \neq \gamma' \in K$, on a que $K(x+\gamma y) \neq K(x+\gamma' y)$. En déduire qu'il existe une infinité de sous-extensions $K \subseteq F \subseteq L$ différentes.

Remarque. Le théorème principal de la théorie de Galois montre en particulier que si $K \subseteq L$ est une extension Galoisienne, alors il y a un nombre fini de sous-extensions $K \subseteq F \subseteq L$. L'exercice ci-dessus montre que cette conséquence est fausse dans le cas inséparable. Le troisième point montre aussi que le théorème de l'élément primitif est faux dans le cas inséparable.