

Corrigé Test 5 - Intégration

1.05.24

Le test dure 90 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire sur une feuille séparée.

Exercice 1. (5 points)

Soit $f : [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

En utilisant une subdivision quelconque, calculer les valeurs de $s_\sigma(f)$ et $S_\sigma(f)$, puis $s(f)$ et $S(f)$. En conclure ensuite si f est intégrable ou non.

On choisit une subdivision quelconque $1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 2$. Alors

$$\begin{aligned} s_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = 0 \cdot (x_1 - x_0) + 0 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + 0 \cdot (x_n - x_{n-1}) = 0 \\ S_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = 1 \cdot (x_1 - x_0) + 1 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + 1 \cdot (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_n - x_0 = 2 - 1 = 1; \\ s(f) &= 0 \text{ et } S(f) = 1; \end{aligned}$$

Ainsi, f n'est pas intégrable.

Exercice 2. (7 points)

a) Démontrer le théorème de la moyenne :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe alors un élément c de $[a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Soit m le minimum de la fonction f sur $[a, b]$ et M son maximum. Comme $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x , on a que

$$m(b - a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx = M(b - a).$$

Ainsi, la valeur $h = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a}$ est comprise entre m et M . La fonction f étant continue, il doit donc exister un nombre c tel que $f(c) = h$ (par le Théorème de la valeur intermédiaire). D'où le résultat.

b) Enoncer le théorème fondamental du calcul intégral.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et G une primitive de f sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Exercice 3. (16 points)

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2} = 2x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow F(x) = x^2 - \frac{1}{x} + c, c \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = (2x + 1)e^{-2x^2 - 2x} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x^2 - 2x} + c, c \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{5x^2 + 6}{x^3 + 2x}$ (décomposition en éléments simples)

On commence par décomposer en éléments simples la fraction :

$$\frac{5x^2 + 6}{x^3 + 2x} = \frac{5x^2 + 6}{x(x^2 + 2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 2} = \frac{a(x^2 + 2) + (bx + c)x}{x(x^2 + 2)} = \frac{ax^2 + 2a + bx^2 + cx}{x(x^2 + 2)}$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ c = 0 \\ 2a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases}$$

On a donc $\frac{5x^2 + 6}{x^3 + 2x} = \frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2 + 2}$, dont les primitives sont données par

$$F(x) = 3 \ln(|x|) + \ln(|x^2 + 2|) + c, c \in \mathbb{R}.$$

d) $f(x) = \frac{x - 4}{x^2 + 6x + 18}$ (complétion de carré)

On a

$$\frac{x - 4}{x^2 + 6x + 18} = \frac{x - 4}{(x + 3)^2 + 9}$$

En posant $u = x + 3$, on obtient

$$\frac{u - 7}{u^2 + 9} = \frac{u}{u^2 + 9} - \frac{7}{u^2 + 9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2u}{u^2 + 9} - \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{\left(\frac{u}{3}\right)^2 + 1},$$

dont les primitives sont $\frac{1}{2} \ln(|u^2 + 9|) - \frac{7}{9} \cdot 3 \arctan\left(\frac{u}{3}\right)$.

Ainsi, $F(x) = \frac{1}{2} \ln(|x^2 + 6x + 18|) - \frac{7}{3} \arctan\left(\frac{x + 3}{3}\right) + c, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. (7 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$.

Déterminer l'aire du domaine D borné limité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox .

On remarque que les zéros sont $-3; 0; 3$. Il faut donc calculer l'aire en deux morceaux :

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-3}^0 x\sqrt{9-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} \int_{-3}^0 -2x(9-x^2)^{1/2} \, dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2} \right]_{-3}^0 = \left[-\frac{1}{3}\sqrt{(9-x^2)^3} \right]_{-3}^0 \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 27 - \left(-\frac{1}{3} \cdot 0 \right) = -9 \end{aligned}$$

$$A_2 = \int_0^3 x\sqrt{9-x^2} \, dx = \dots = \left[-\frac{1}{3}\sqrt{(9-x^2)^3} \right]_0^3 = -\frac{1}{3} \cdot 0 - \left(-\frac{1}{3} \cdot 27 \right) = 9$$

Ainsi, l'aire du domaine est égale à $A = |A_1| + |A_2| = 18 \text{ u}^2$.

Exercice 5. (17 points)

a) Calculer l'intégrale suivante en appliquant le changement de variables $x = \sqrt{\sin(t)}$:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$$

On pose $x = \varphi(t) = \sqrt{\sin(t)}$, $\varphi'(t) = \frac{1}{2} \cdot (\sin(t))^{-1/2} \cdot \cos(t) = \frac{\cos(t)}{2\sqrt{\sin(t)}}$. De plus, si $x \in [0; 2]$,

alors $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On a donc

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(t)}}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} \cdot \frac{\cos(t)}{2\sqrt{\sin(t)}} \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \, dt = \left[\frac{1}{2}t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

b) Calculer l'intégrale indéfinie suivante en utilisant l'intégration par parties :

$$\int e^{2x} \cos(x) \, dx$$

On doit calculer $I = \int e^{2x} \cos(x) \, dx$. On pose $f = e^{2x}$ et $g' = \cos(x)$, donc $f' = 2e^{2x}$ et $g = \sin(x)$. On calcule

$$I = \int e^{2x} \cos(x) \, dx = [e^{2x} \sin(x)] - \int 2e^{2x} \cdot \sin(x) \, dx$$

On refait une intégration par parties avec $f = 2e^{2x}$ et $g' = \sin(x)$, donc $f' = 4e^{2x}$ et $g = -\cos(x)$. On obtient

$$\begin{aligned} I &= [e^{2x} \sin(x)] - \left([2e^{2x} \cdot (-\cos(x))] - \int 4e^{2x} \cdot (-\cos(x)) dx \right) \\ &= [e^{2x} \sin(x) + 2e^{2x} \cdot \cos(x)] - 4 \int e^{2x} \cdot \cos(x) dx = [e^{2x} \sin(x) + 2e^{2x} \cdot \cos(x)] - 4I \end{aligned}$$

Ainsi, $5I = e^{2x} \sin(x) + 2e^{2x} \cdot \cos(x) + c$, donc $I = \frac{1}{5}(e^{2x} \sin(x) + 2e^{2x} \cdot \cos(x)) + c$

c) Calculer l'intégrale suivante en utilisant l'intégration par parties :

$$\int_1^2 \sqrt{x} \ln(x) dx$$

On pose $f = \ln(x)$ et $g' = \sqrt{x} = x^{1/2}$, donc $f' = \frac{1}{x}$ et $g = \frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$. On calcule

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{x} \ln(x) dx &= \left[\ln(x) \cdot \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{x^3} dx = \left[\ln(x) \cdot \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \right]_1^2 - \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{x^{3/2}}{x} dx \\ &= \left[\frac{2}{3} \ln(x) \sqrt{x^3} \right]_1^2 - \frac{2}{3} \int_1^2 x^{1/2} dx = \left[\frac{2}{3} \ln(x) \sqrt{x^3} - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} \right]_1^2 \\ &= \frac{2}{3} \ln(2) \sqrt{8} - \frac{4}{9} \sqrt{8} - \left(0 - \frac{4}{9} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \ln(2) - \frac{8\sqrt{2}}{9} + \frac{4}{9} \cong 0,49 \end{aligned}$$

Exercice 6. (6 points)

Etudier la convergence des intégrales suivantes (on demande uniquement si l'intégrale est convergente ou divergente) :

a) $\int_2^{10} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx$

On fait le changement de variables $t = x - 2$, donc $x = \varphi(t) = t + 2$, $\varphi'(t) = 1$ et si $x \in [2; 10]$, alors $t \in [0; 8]$. On a donc

$$\int_2^{10} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx = \int_0^8 \frac{1}{t^{2/3}} dt$$

Par un critère de convergence, comme $\alpha = \frac{2}{3} < 1$, l'intégrale généralisée converge.

Remarque : On aurait pu faire directement le calcul, qui donne $[3t^{1/3}]_0^8 = 6$.

b) $\int_1^{+\infty} \frac{2x^3 - 1}{x^3 + 1} dx$

On remarque que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 1}{x^3 + 1} = 2 \neq 0$, donc par un critère de convergence on sait que cette intégrale généralisée diverge.

Remarque : on aurait pu faire le calcul de la primitive et vérifier qu'elle diverge (mais c'est plus long!) :

On commence par faire une division euclidienne, puis une décomposition en éléments simples :

$$f(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^3 + 1} = 2 - \frac{3}{x^3 + 1} = 2 - \frac{1}{x + 1} + \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}$$

Les primitives sont alors $F(x) = 2x - \ln(|x + 1|) - \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + c$.

Les détails du calcul pour la primitive de $\frac{1}{x^3 + 1}$ sont faits dans l'exercice 1c) de la série 24.