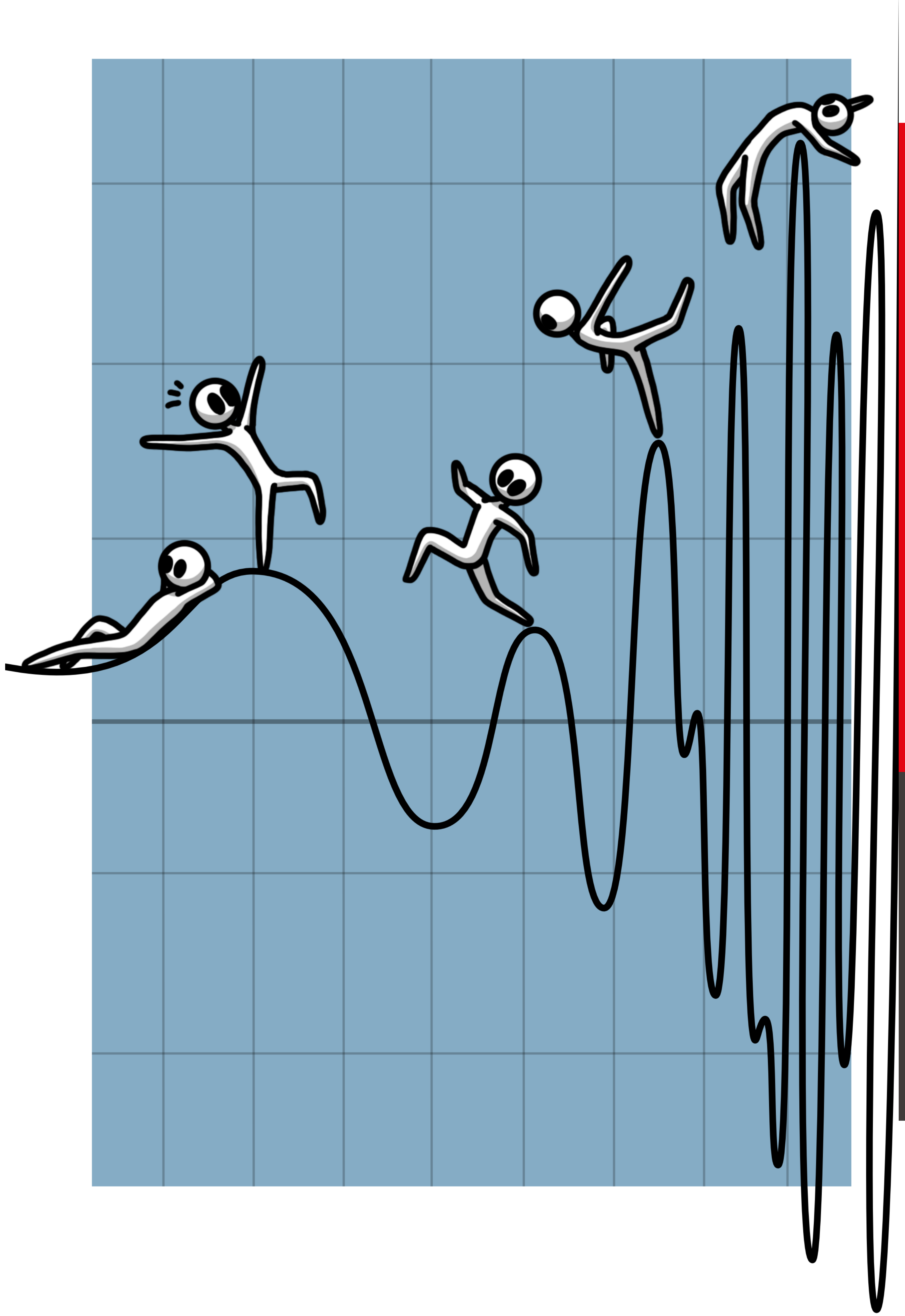
Introduction

- Lors du cours sur la représentation binaire, nous avons vu comment représenter des nombres avec des suites de 0 et de 1.
- Aujourd'hui, nous allons voir comment représenter des objets plus complexes, comme des *signaux physiques* (sons ou images), avec ces mêmes suites de 0 et de 1.
- Et tout aussi important (voire plus!), nous verrons la semaine prochaine comment *restituer* un signal physique à partir d'une suite de 0 et de 1.

EPFL



Information, Calcul et Communication

Signaux, fréquences et bande passante

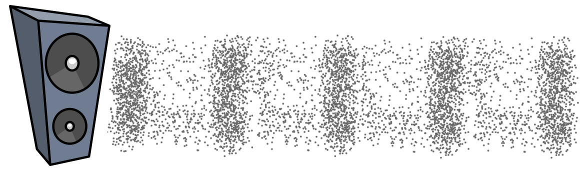
Olivier Lévêque

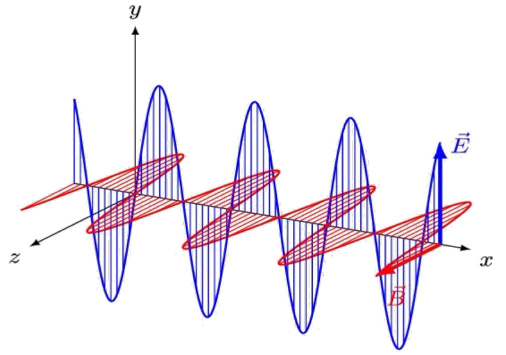
École polytechnique fédérale de Lausanne

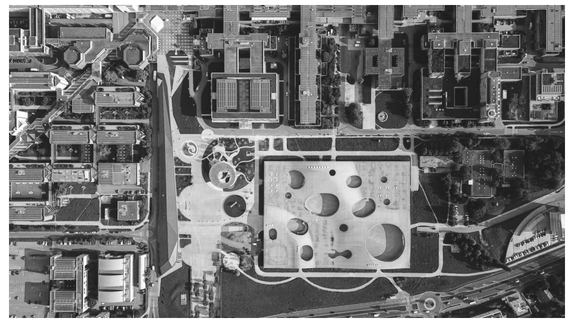
Qu'est-ce qu'un signal ? C'est une fonction !

Exemples:

1. Une onde sonore ($X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
   - t = temps, $X(t)$ = pression
2. Une onde électromagnétique ($X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$)
3. Une photo noir-blanc ($X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)
   - (u, v) = coordonnées, $X(u, v)$ = niveau de gris
4. Une photo couleur ($X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$)
   - $(u, v) \to (X_{rouge}(u, v)\,,\ X_{vert}(u, v)\,,\ X_{bleu}(u, v))$
5. Une vidéo ($X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$)







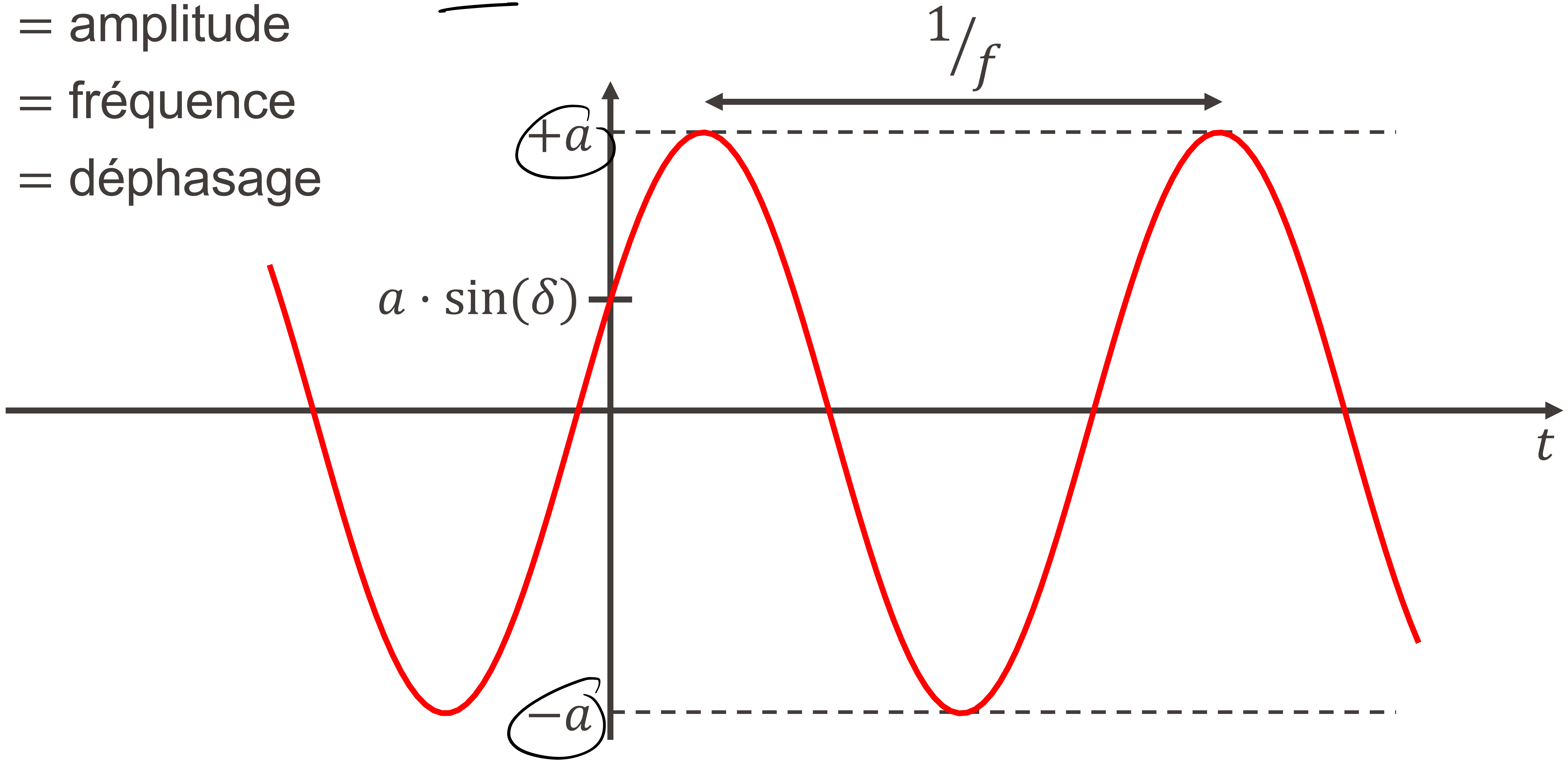
Nous considérerons exclusivement des **signaux unidimensionnels** ($X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), par souci de clarté et de simplification.

Sinusoïde pure

$-a \le X(t) \le +a$

$$X(t) = a \cdot \sin(2\pi f t + \delta) \qquad t \in \mathbb{R}$$

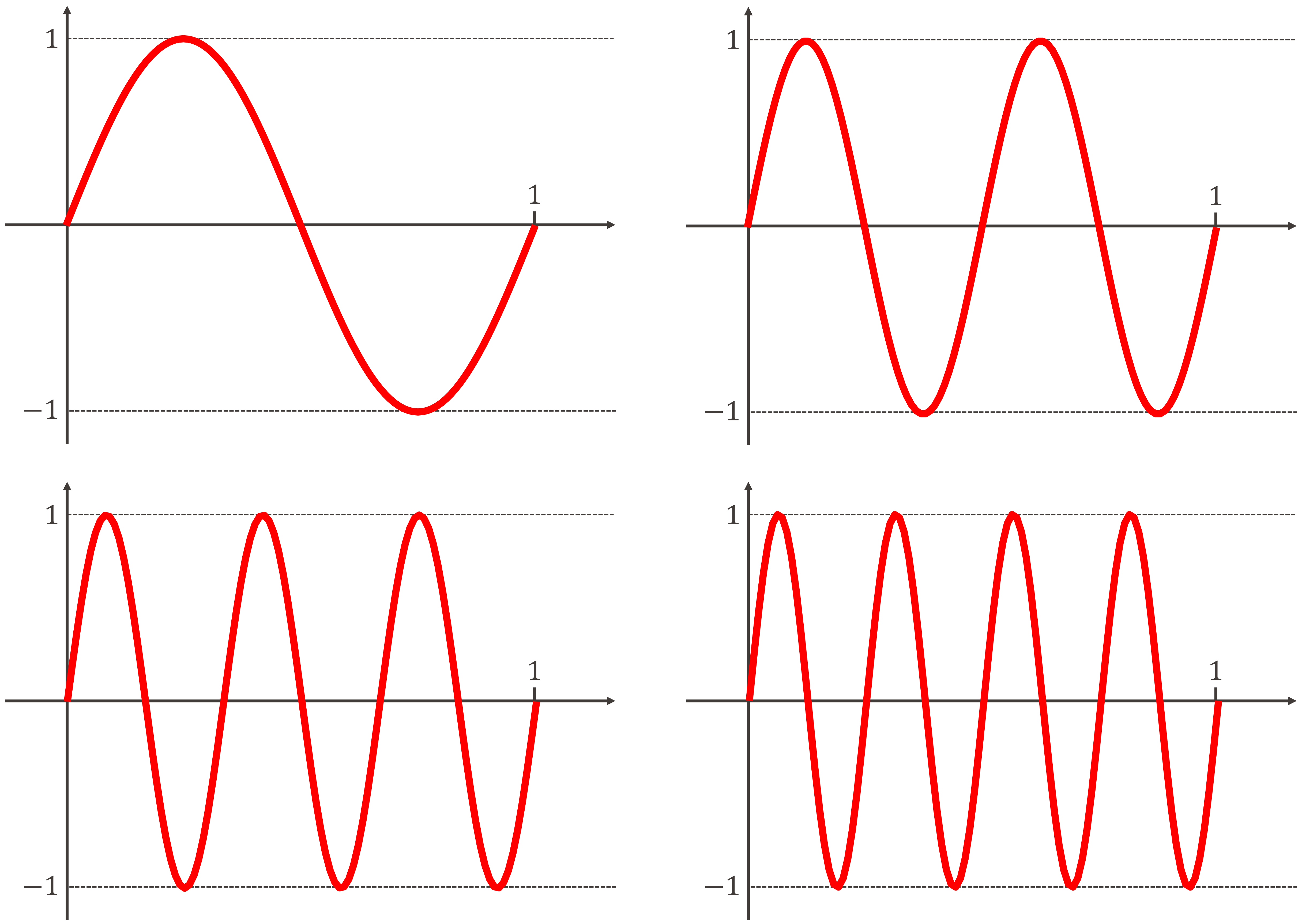
- a = amplitude
- f = fréquence
- δ = déphasage



Sinusoïde pure : fréquence

$$X(t) = a \cdot \sin(2\pi f t + \delta) \qquad t \in \mathbb{R}$$

- a = amplitude = 1
- f = fréquence
- δ = déphasage = 0



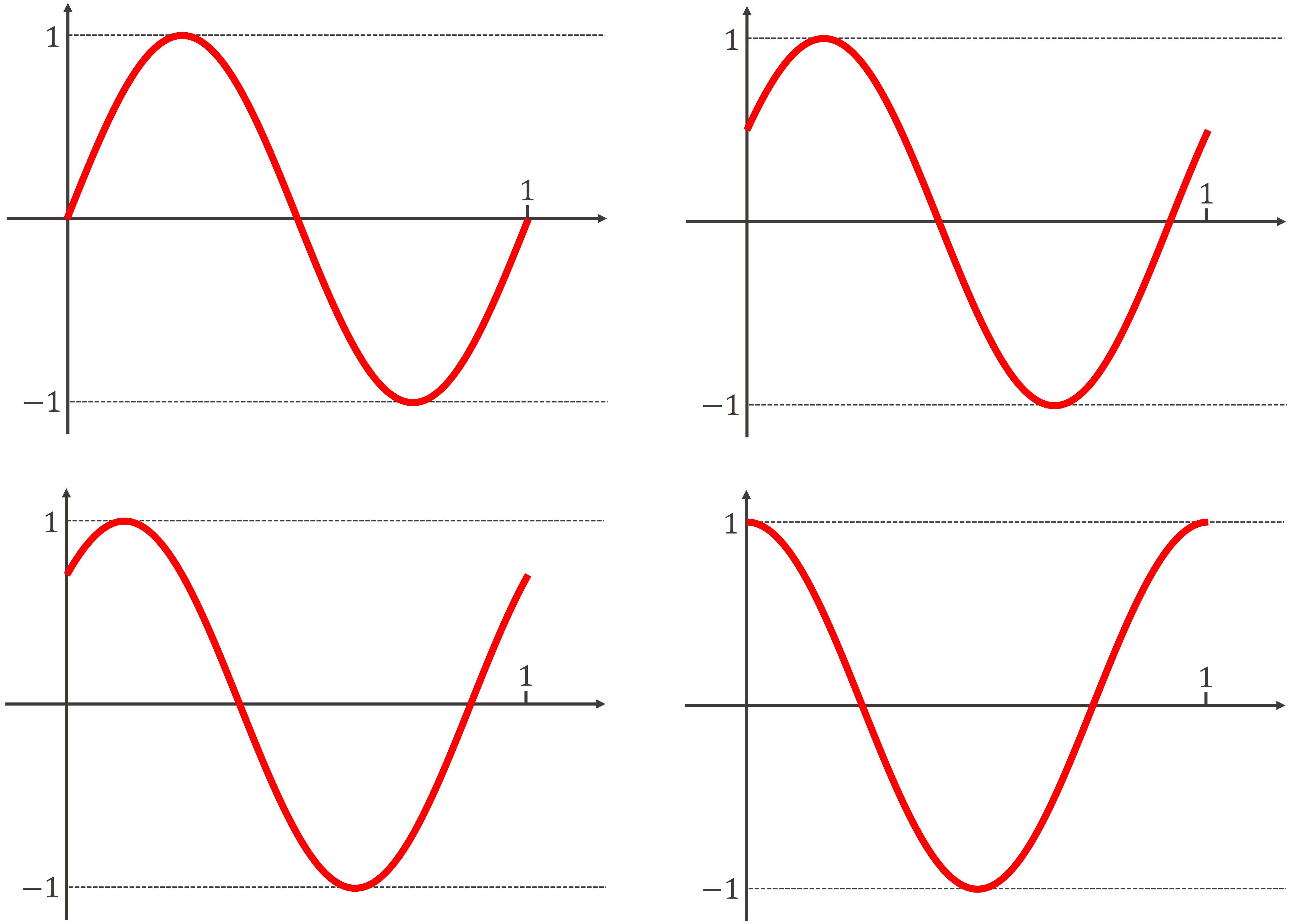
- $f = 1 : X(t) = \sin(2\pi t)$
- $f = 2 : X(t) = \sin(4\pi t)$
- $f = 3 : X(t) = \sin(6\pi t)$
- $f = 4 : X(t) = \sin(8\pi t)$

Sinusoïde pure : déphasage

$$X(t) = a \cdot \sin(2\pi f t + \delta) \qquad t \in \mathbb{R}$$

- a = amplitude = 1
- f = fréquence = 1
- δ = déphasage

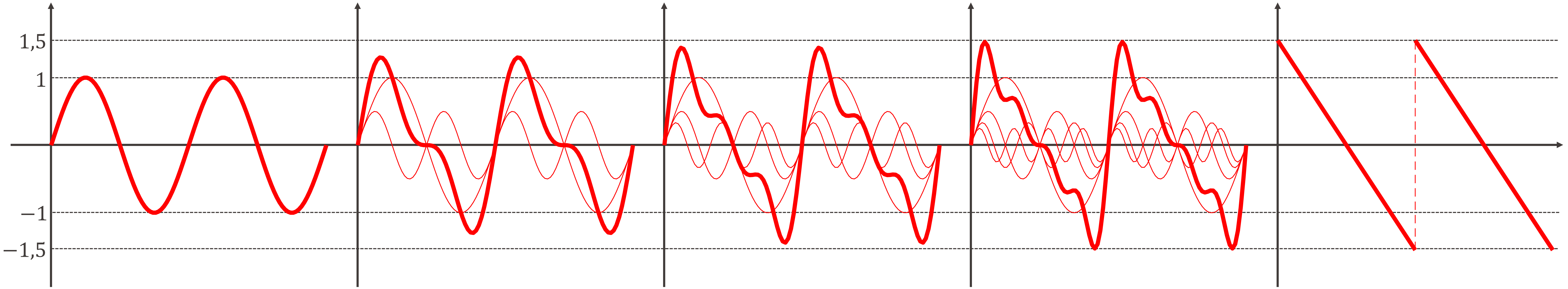
- $\delta = 0$: $X(t) = \sin(2\pi t)$
- $\delta = \frac{\pi}{6}$: $X(t) = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$
- $\delta = \frac{\pi}{4}$: $X(t) = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$
- $\delta = \frac{\pi}{2}$: $X(t) = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$
  $= \cos(2\pi t)$



Somme de sinusoïdes

Exemple : $a_j = \frac{1}{j}$, $f_j = 2j$, $\delta_j = 0$, $n = 1,2,3,4,\ldots$

- $n = 1 : X(t) = \sin(4\pi t)$
- $n = 2 : X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t)$
- $n = 3 : X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t)$
- $n = 4 : X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t) + \frac{1}{4}\sin(16\pi t)$
- $n =$ "∞"



EPFL

Théorie de Fourier

- **Affirmation :** (à prendre avec des pincettes...)

« Tout signal est une somme de sinusoïdes ! »

Joseph Fourier
Mathématicien et physicien
1768 - 1830

Théorie de Fourier

- **Affirmation :** (à prendre avec des pincettes...)

« Tout signal est une somme de sinusoïdes ! »

- Par la suite, nous ne considérerons que des signaux qui sont des sommes **finies** de sinusoïdes.

Joseph Fourier
Mathématicien et physicien
1768 - 1830

Fréquences : unité de mesure

- Un signal dont la fréquence est de $f\ Hz$ se répète toutes les $T = {}^{1}/_{f}$ sec.

Fréquences : unité de mesure

- Un signal dont la fréquence est de $f\ Hz$ se répète toutes les $T = {}^{1}/_{f}$ sec.

- La fréquence f contenue dans la sinusoïde $X(t) = a \cdot \sin(2\pi f t + \delta)$ s'exprime en

$$\text{hertz} = Hz = \frac{1}{s}.$$

Fréquences : unité de mesure

- Un signal dont la fréquence est de $f\ Hz$ se répète toutes les $T = {}^{1}/_{f}$ sec.

- La fréquence f contenue dans la sinusoïde $X(t) = a \cdot \sin(2\pi f t + \delta)$ s'exprime en

$$\text{hertz} = Hz = \frac{1}{s}.$$

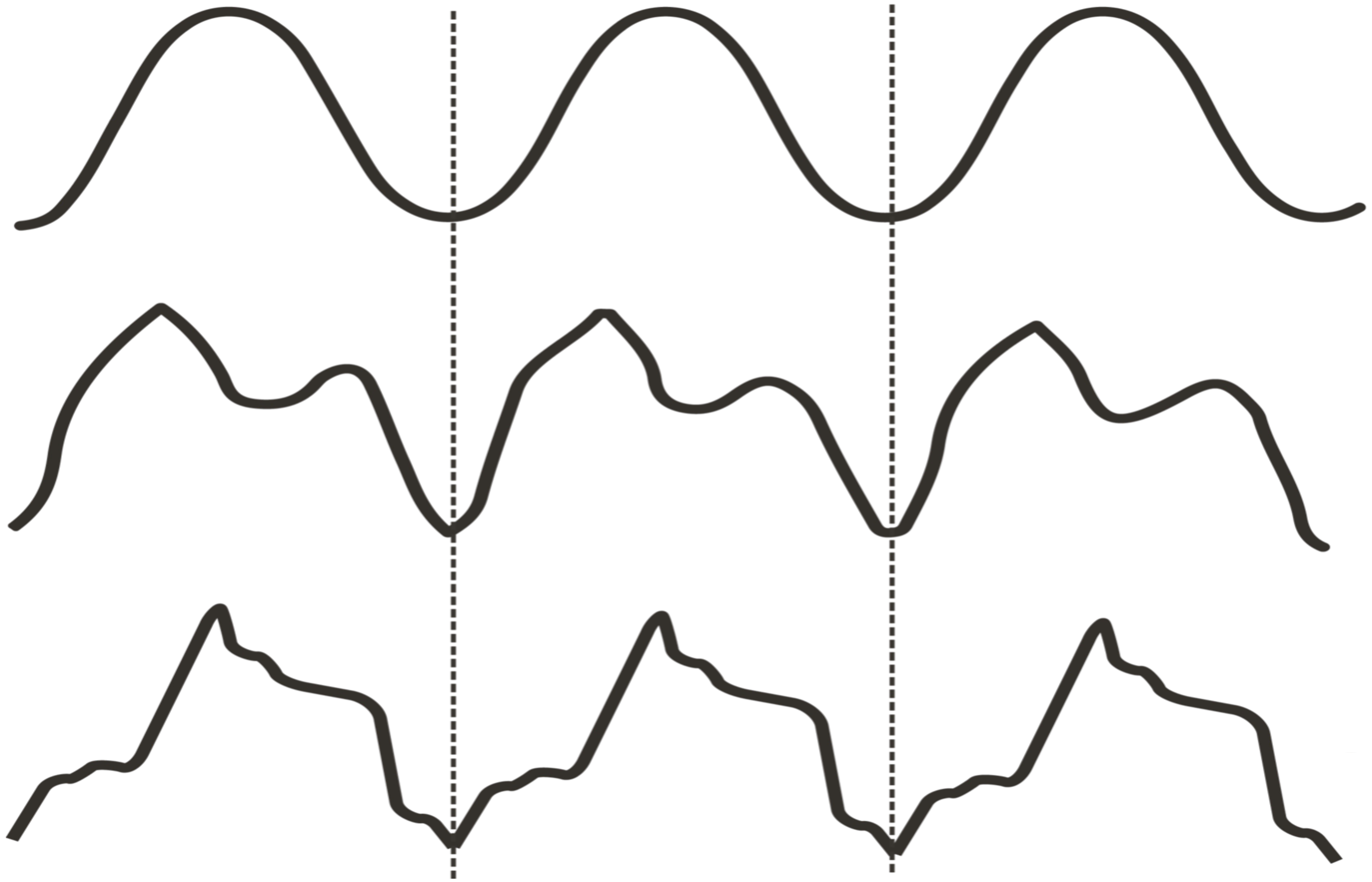
- Unité de mesure attribuée en l'honneur de H. R. Hertz, à qui on doit:
  - la vérification expérimentale que la lumière est une onde électromagnétique
  - le premier système de transmission et réception d'ondes radio.

Heinrich Rudolf Hertz
Ingénieur et physicien
1857-1894

Tous les « La à 440 Hz » ne sont pas les mêmes !

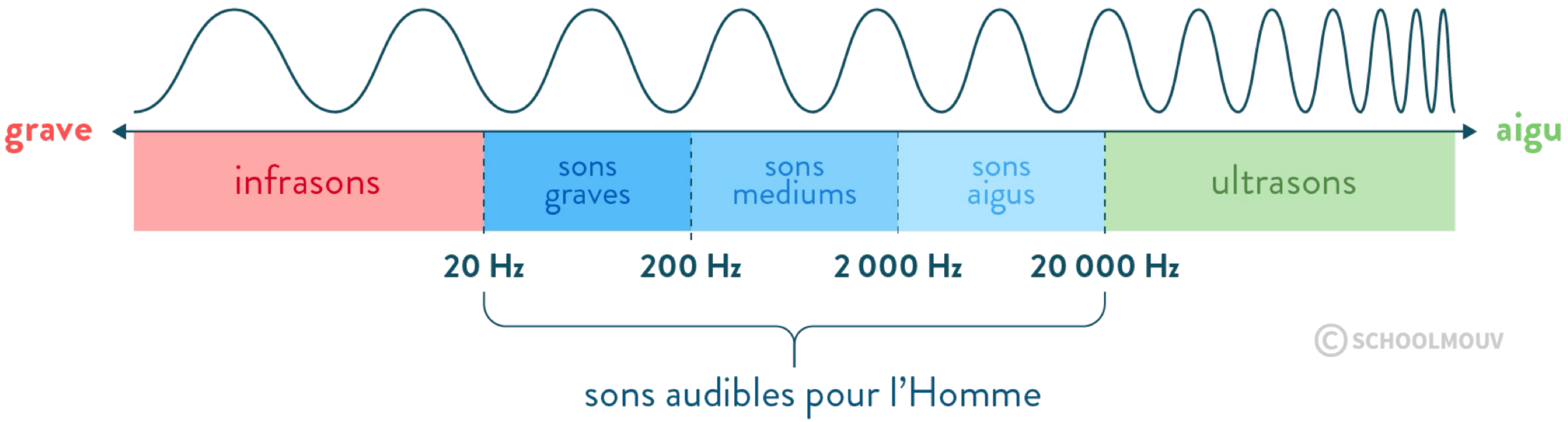
- **Exemple musical:** La note « La » à $440\ Hz$ est un signal (onde sonore) qui se répète toutes les $\frac{1}{440} = 2.2727$ ... millisecondes.

  - diapason électronique
  - violon
  - clarinette

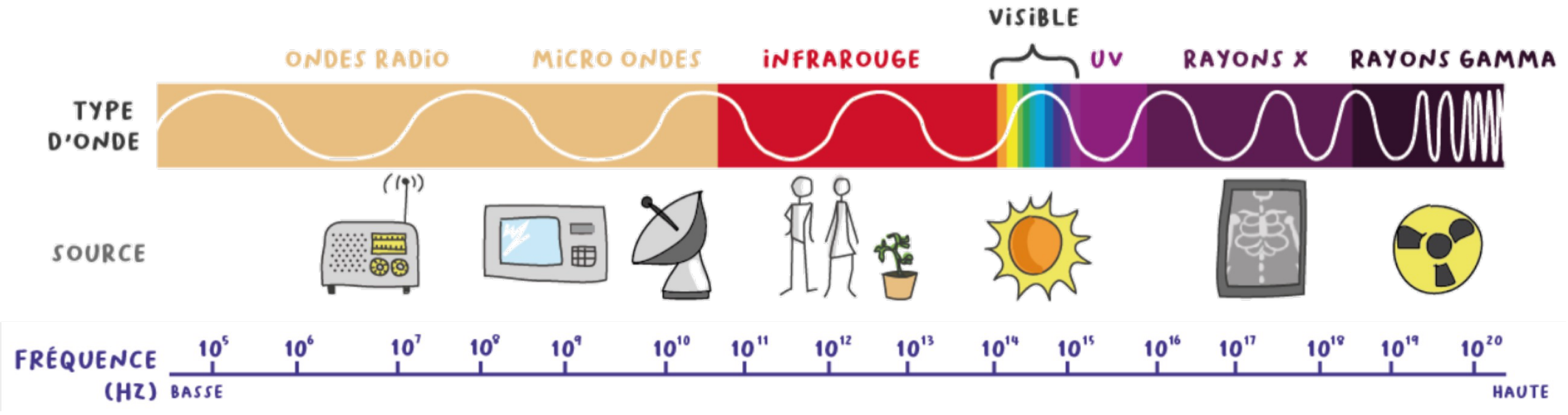


Fréquences : quelques ordres de grandeur

- Ondes sonores :



- Ondes électromagnétiques :



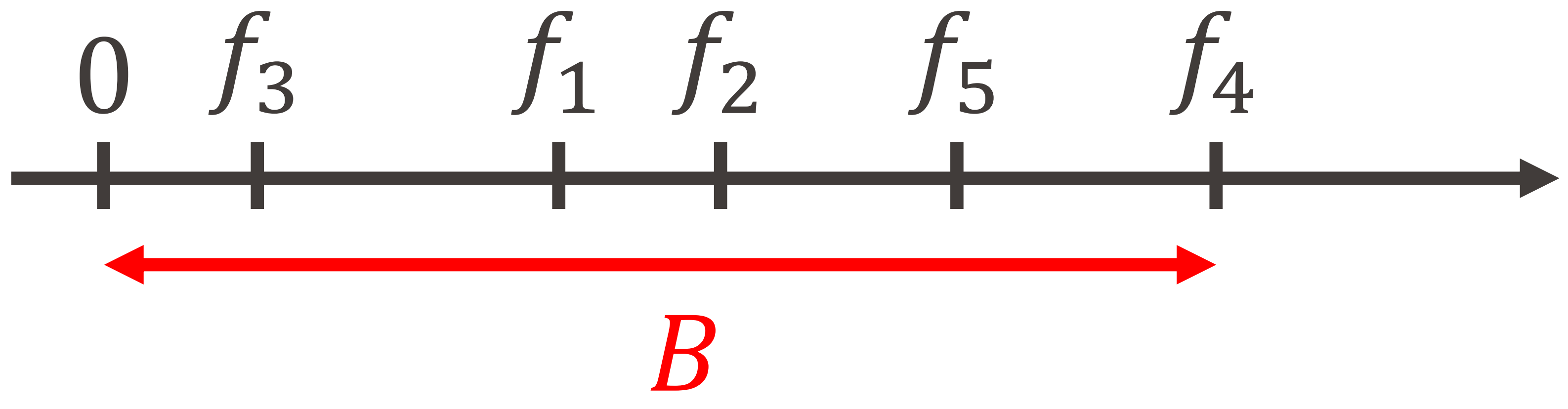
Bande passante

- Revenons à notre somme de sinusoïdes :

$$X(t) = a_1 \cdot \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \cdots + a_n \cdot \sin(2\pi f_n t + \delta_n)$$

- On définit comme suit **la bande passante** de ce signal :

$$B = f_{max} = \max\{f_1, \dots, f_n\}$$



- **La bande passante joue un rôle primordial en traitement du signal.**

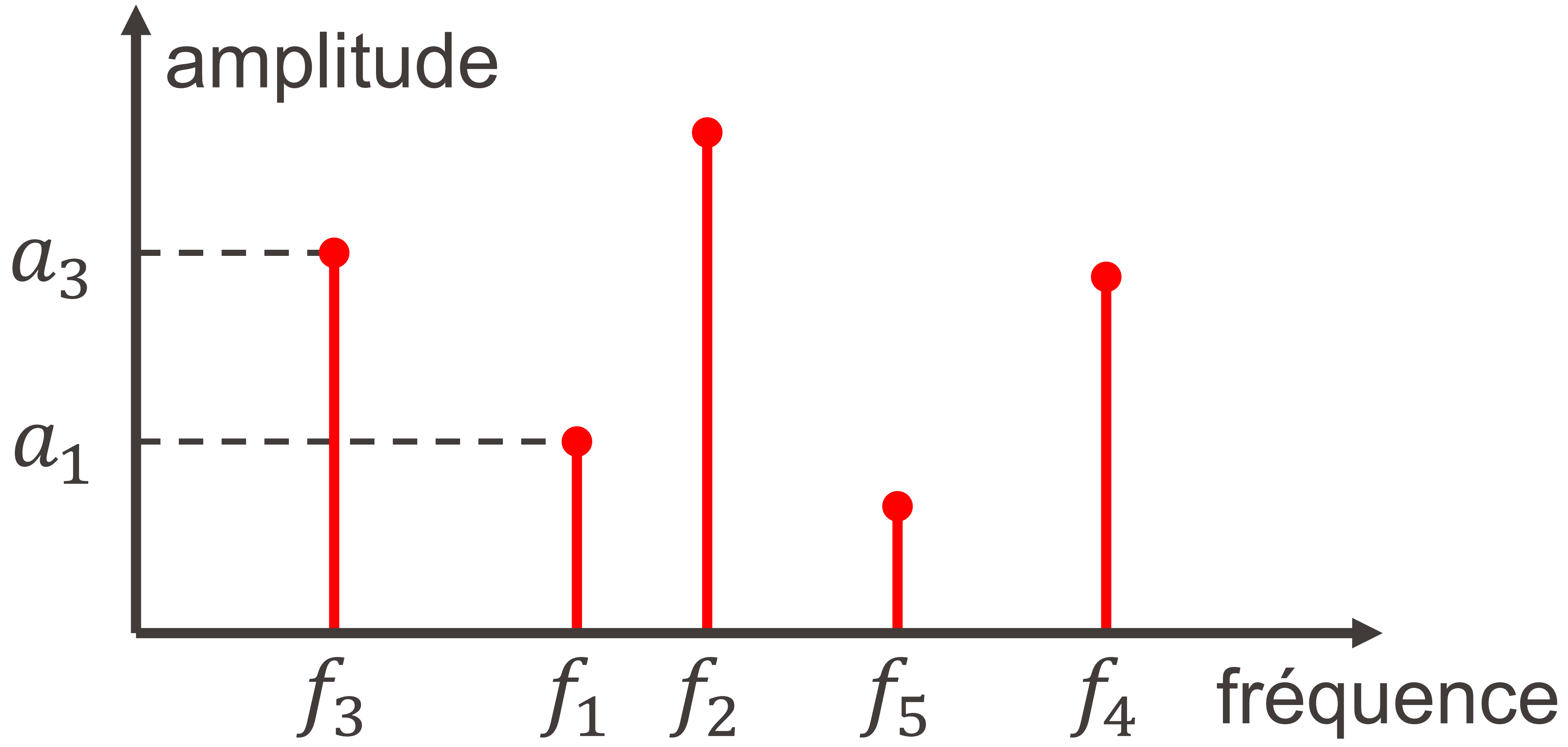
Représentation spectrale du signal (Fourier)

- Toujours avec notre somme de sinusoïdes :

$$X(t) = a_1 \cdot \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \cdots + a_n \cdot \sin(2\pi f_n t + \delta_n)$$

- axe horizontal = fréquences présentes
- axe vertical = amplitudes correspondantes

- **Le spectre du signal :**



EPFL

Information, Calcul et Communication

Filtrage de signaux

Olivier Lévêque

École polytechnique fédérale de Lausanne

Filtrage d’un signal

- De manière générale, lorsqu’un signal ($X(t),\ t \in \mathbb{R}$) passe par un **filtre**, il en ressort une version déformée ($\hat{X}(t),\ t \in \mathbb{R}$) :

Filtrage d'un signal

- De manière générale, lorsqu'un signal ($X(t),\ t \in \mathbb{R}$) passe par un **filtre**, il en ressort une version déformée ($\widehat{X}(t),\ t \in \mathbb{R}$) :

$$X(t) \longrightarrow \boxed{\textbf{FILTRE}} \longrightarrow \widehat{X}(t)$$

Pourquoi donc vouloir filtrer un signal ?

Par exemple, pour atténuer le bruit !

→ filtres "passe-bas"

Filtrage d'un signal

- De manière générale, lorsqu'un signal ($X(t),\ t \in \mathbb{R}$) passe par un **filtre**, il en ressort une version déformée ($\widehat{X}(t),\ t \in \mathbb{R}$) :

$$X(t) \longrightarrow \boxed{\textbf{FILTRE}} \longrightarrow \widehat{X}(t)$$

Pourquoi donc vouloir filtrer un signal ?

Par exemple, pour atténuer le bruit !

- Dans ce cours, nous allons voir deux exemples de filtres **passe-bas** :
  - Le filtre **passe-bas idéal**
  - Le filtre **à moyenne mobile**

Filtre passe-bas idéal

Un filtre passe-bas idéal est un filtre qui **supprime** les composantes de fréquences supérieures à une fréquence de coupure f_c.

Exemple :

- Considérons le signal (contenant les fréquences $f = 1, 4$ et $32\ Hz$) :

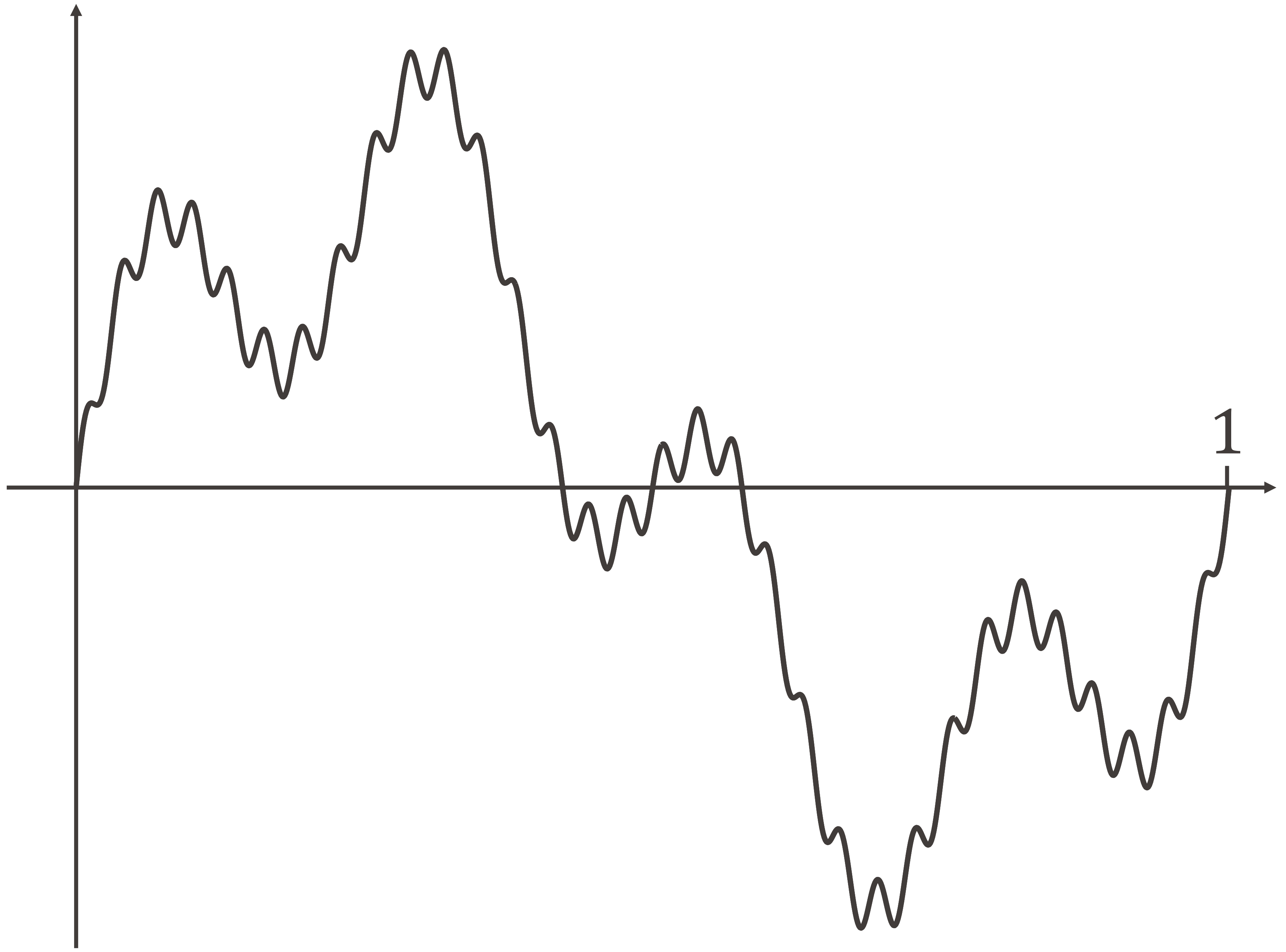
$$X(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{10}\sin(64\pi t)$$

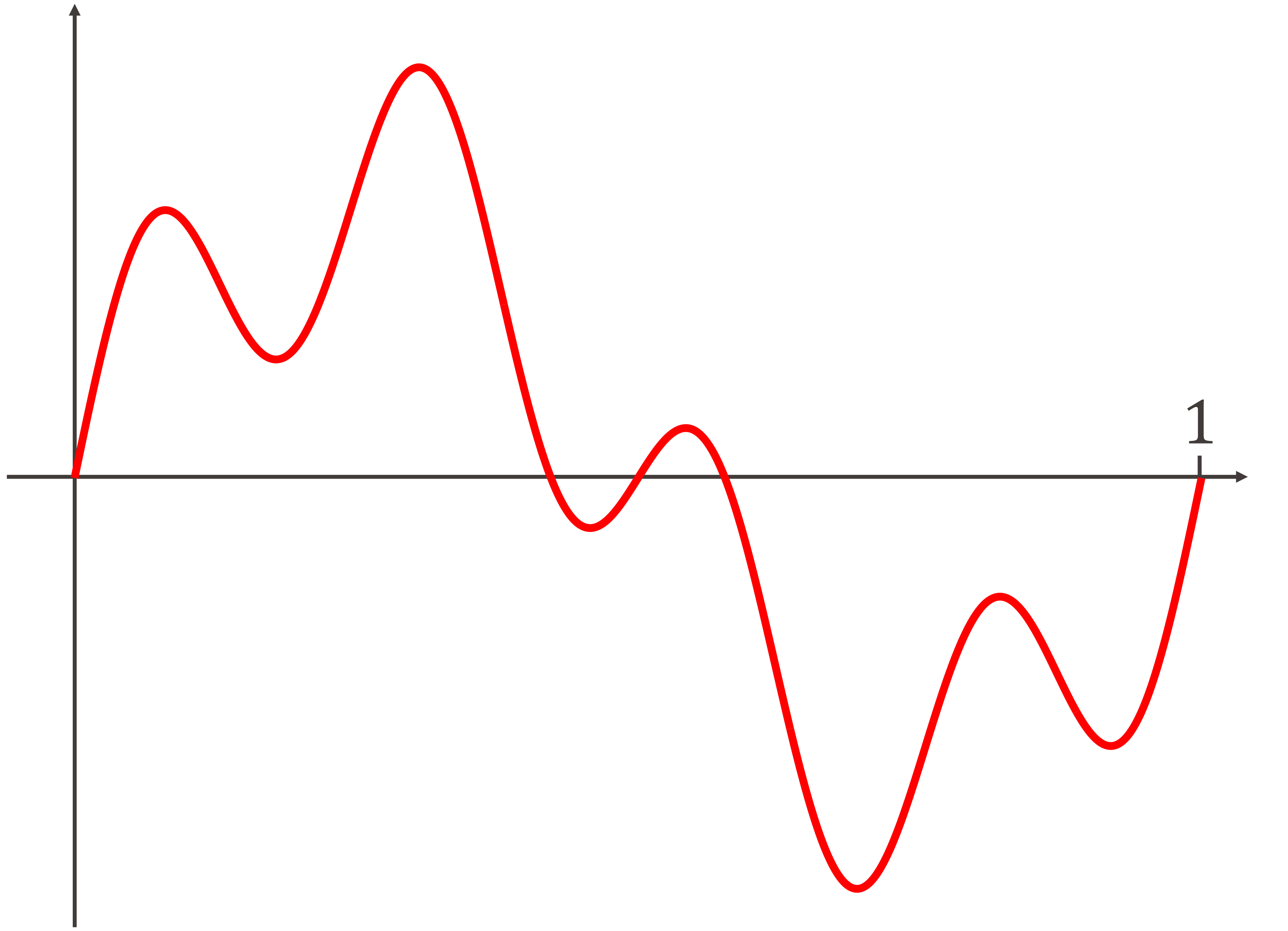
- Après passage au travers d'un **filtre passe-bas avec fréquence de coupure** $f_c = 30\ Hz$, la composante à $32\ Hz$ disparaît, et le signal devient :

$$\widehat{X}(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t)$$

Filtre passe-bas idéal

Exemple :





$$X(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{10}\sin(64\pi t) \quad \rightarrow \quad \widehat{X}\,(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t)$$

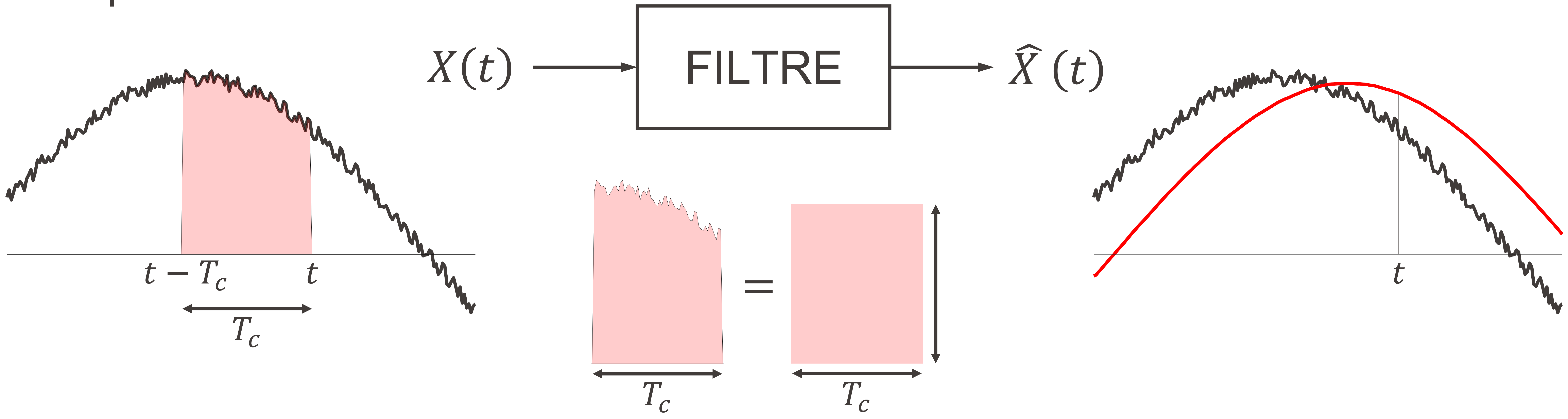
Filtre à moyenne mobile

Le signal $\widehat{X}(t)$ sortant à l'instant t d'un filtre à moyenne mobile est donné par :

$$\widehat{X}(t) = \frac{1}{T_c} \cdot \boxed{\int_{t-T_c}^{t} X(s) \cdot ds}$$

où T_c est **la période sur laquelle on moyenne le signal**.

- Interprétation :



Filtre à moyenne mobile

Exemple : Que devient le signal $X(t) = \sin(2\pi f t)$ passant par un tel filtre?

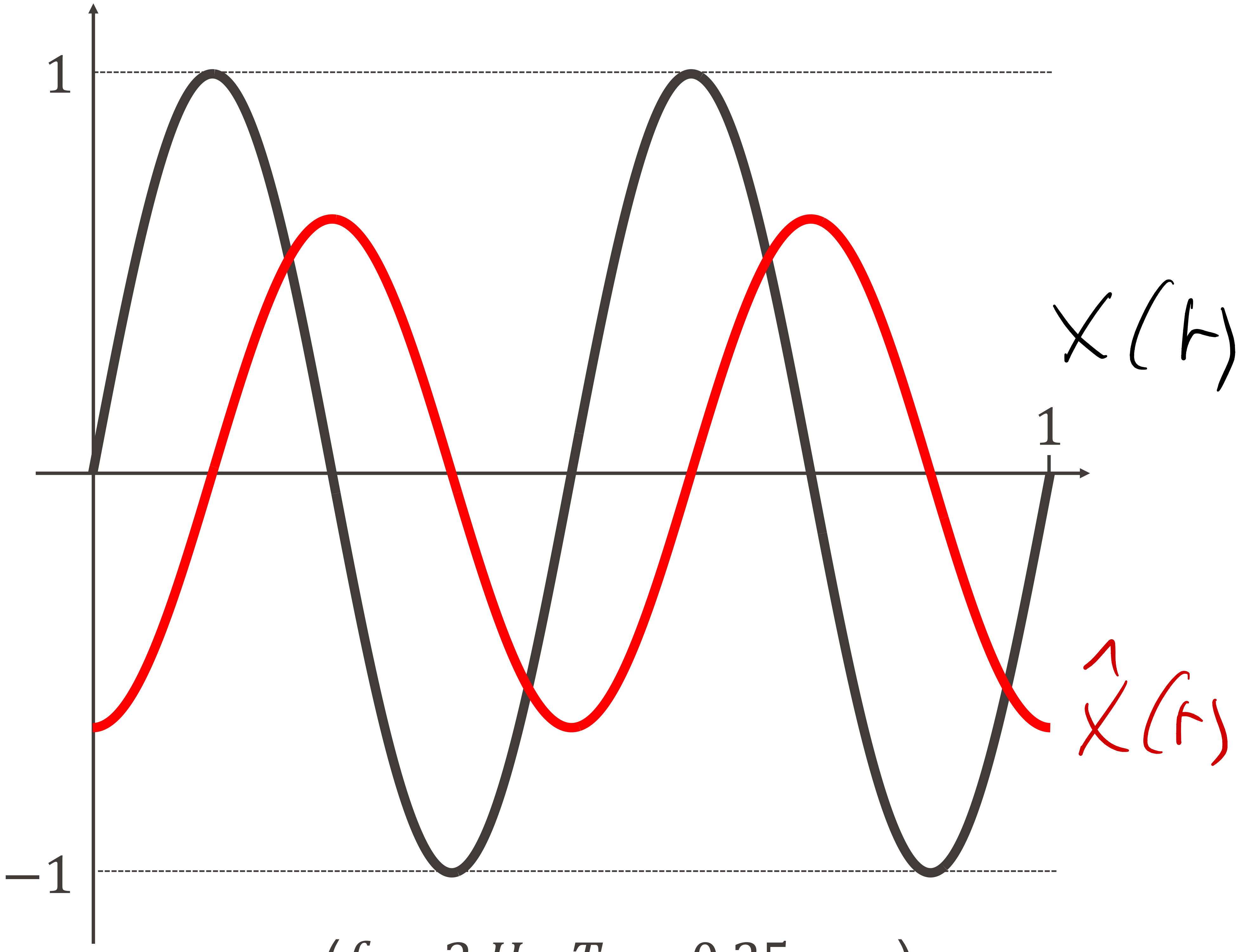
$$\widehat{X}(t) = \frac{1}{T_c} \cdot \int_{t-T_c}^{t} X(s) \cdot ds$$

$$= \frac{1}{T_c} \cdot \int_{t-T_c}^{t} \sin(2\pi f s) \cdot ds$$

$$= \frac{\cos\big(2\pi f (t - T_c)\big) - \cos(2\pi f t)}{2\pi f \cdot T_c}$$

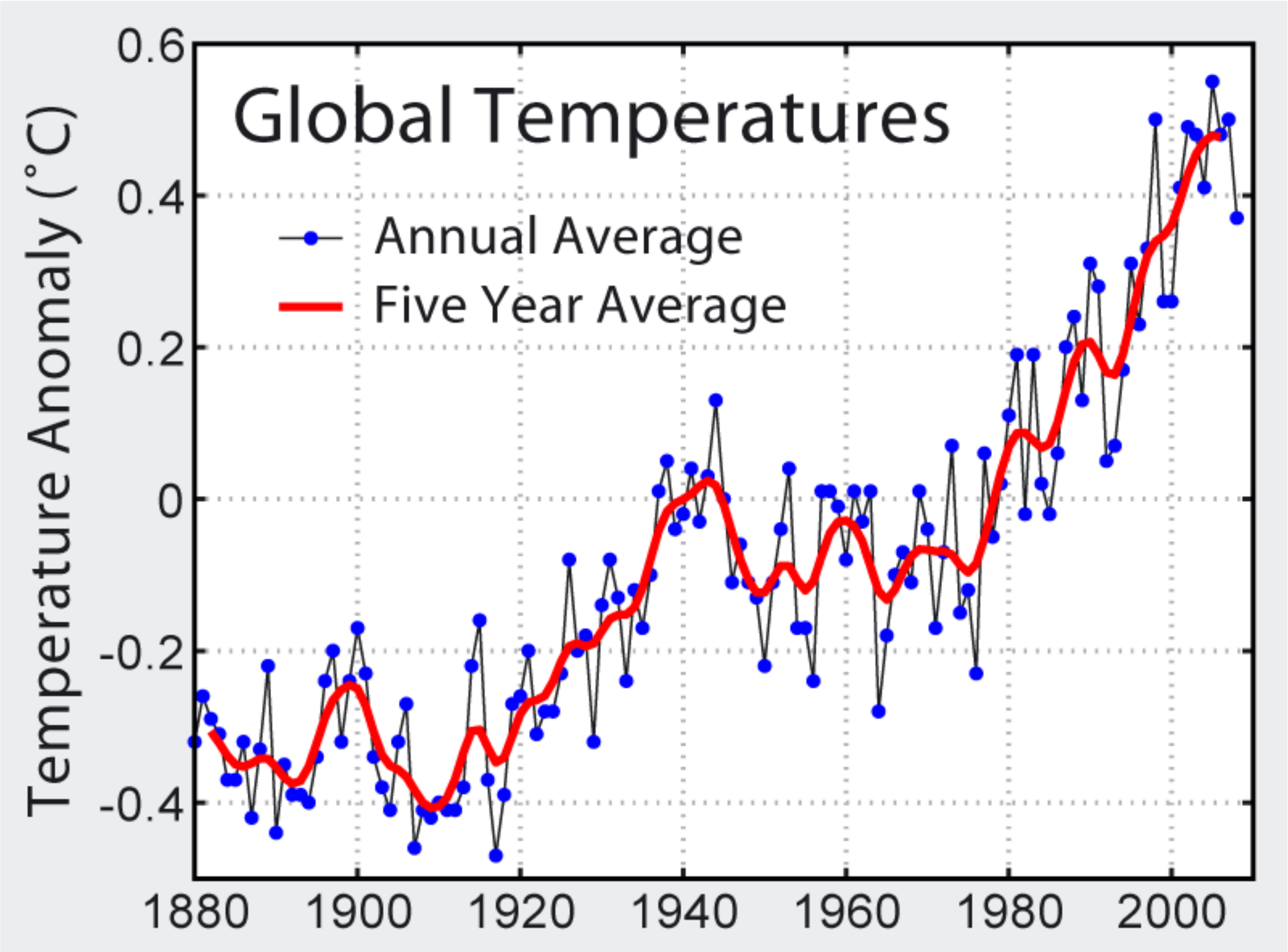
= Sinusoïde pure

$$= \underbrace{\frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c}}_{= a < 1} \cdot \sin(2\pi \underbrace{f}_{= f} t \underbrace{- \pi f T_c}_{= \delta < 0})$$



$(f = 2\ Hz, T_c = 0.25\ \text{sec})$

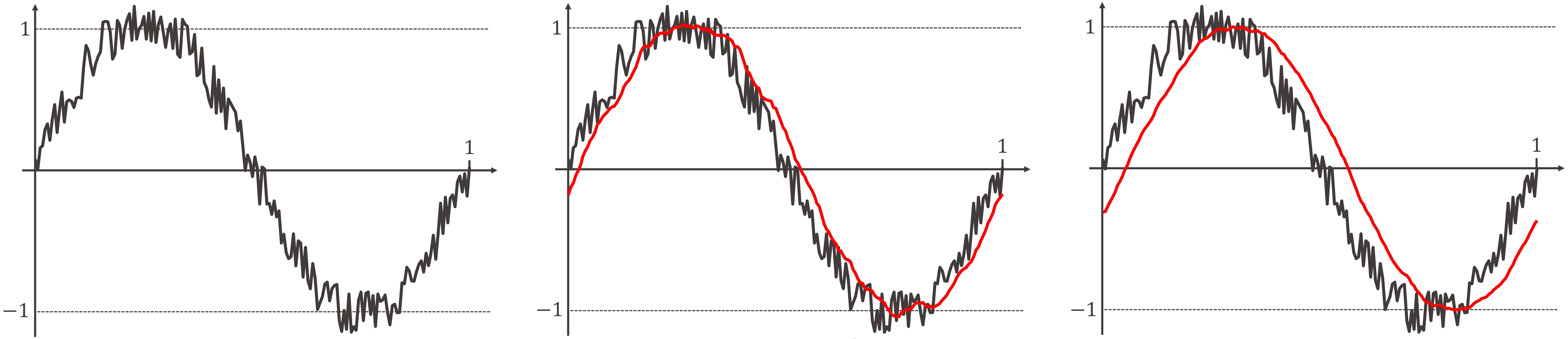
Filtre à moyenne mobile discret



Source: Global Warming Art

Effet de la période T_c

$X(t) \rightarrow \color{red}{\widehat{X}\,(t)}$:



$T_c = 0.05$ sec

$T_c = 0.1$ sec

Plus T_c augmente :

- plus le signal sortant est **lisse**,
- mais plus le **délai** est grand également.

Effet de la période T_c

- Revenons à la sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi f t)$:

$$\widehat{X}(t) = \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \cdot \sin(2\pi f t - \pi f T_c)$$

- De cette expression, on déduit que :

$$\max_{t \in \mathbb{R}} \left|\widehat{X}(t)\right| = \left|\frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c}\right| \leq \frac{1}{\pi f T_c}$$

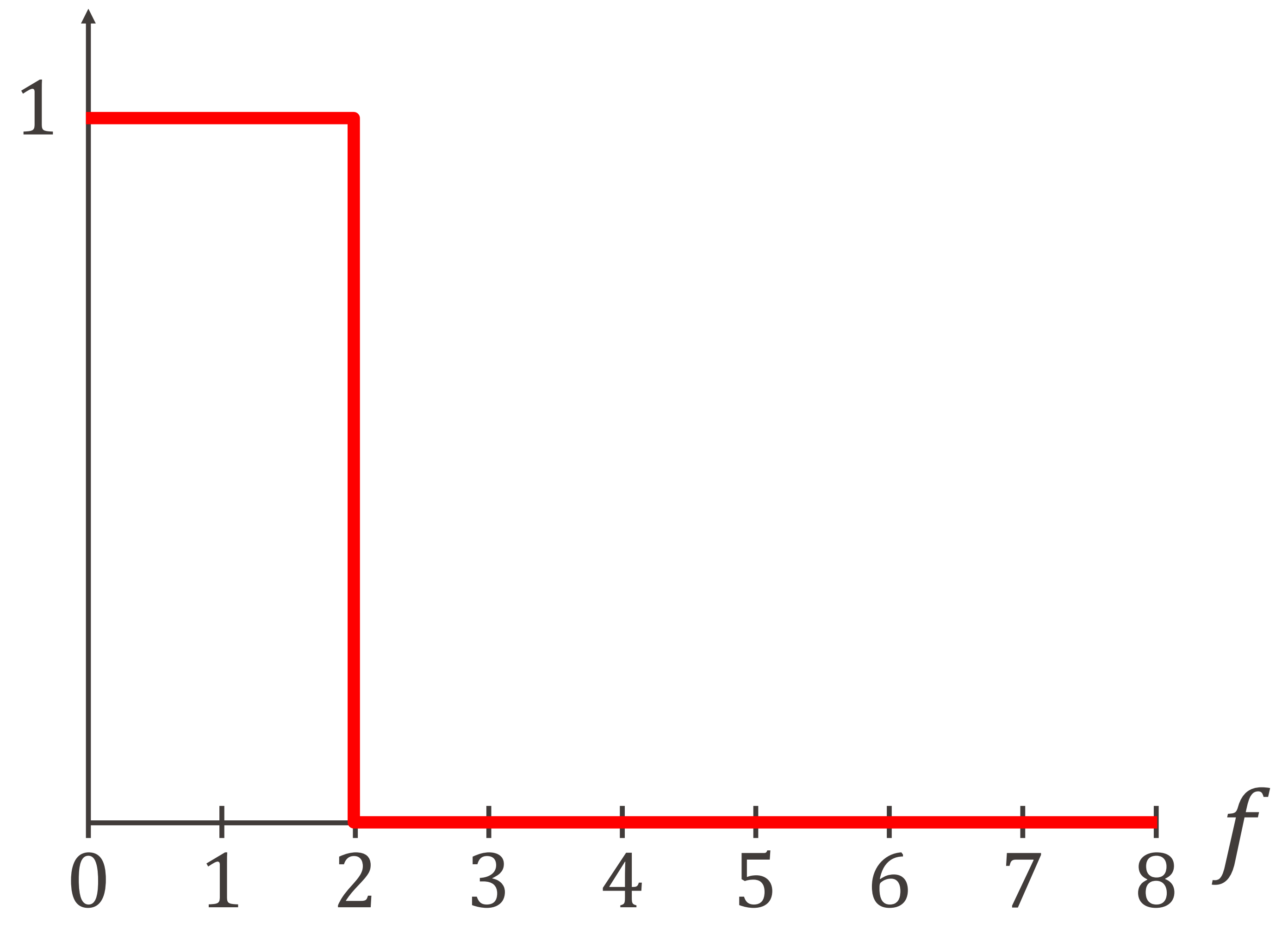
- On voit que si $f T_c$ est grand, alors le signal $\widehat{X}(t)$ est de faible amplitude.

Après le passage à travers un filtre à moyenne mobile, les **hautes fréquences** d'un signal sont donc **fortement atténuées**.

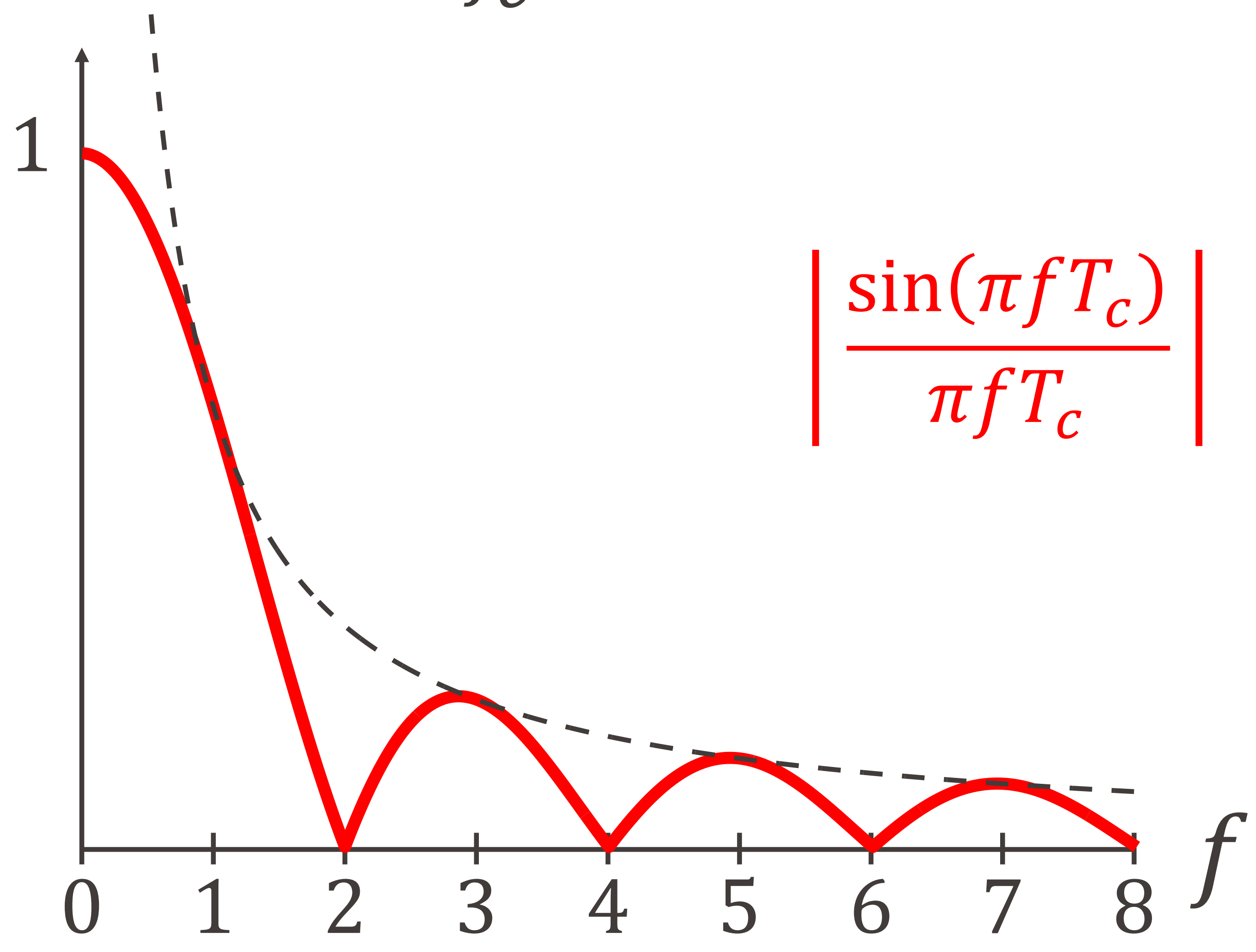
Comparaison de ces deux filtres passe-bas

Atténuation des fréquences dans la **représentation spectrale** :

- un **filtre passe-bas idéal** avec fréquence de coupure $f_c = 2\ Hz$



- un **filtre à moyenne mobile** de période $Tc = \frac{1}{fc} = 0.5\, \text{sec}$.



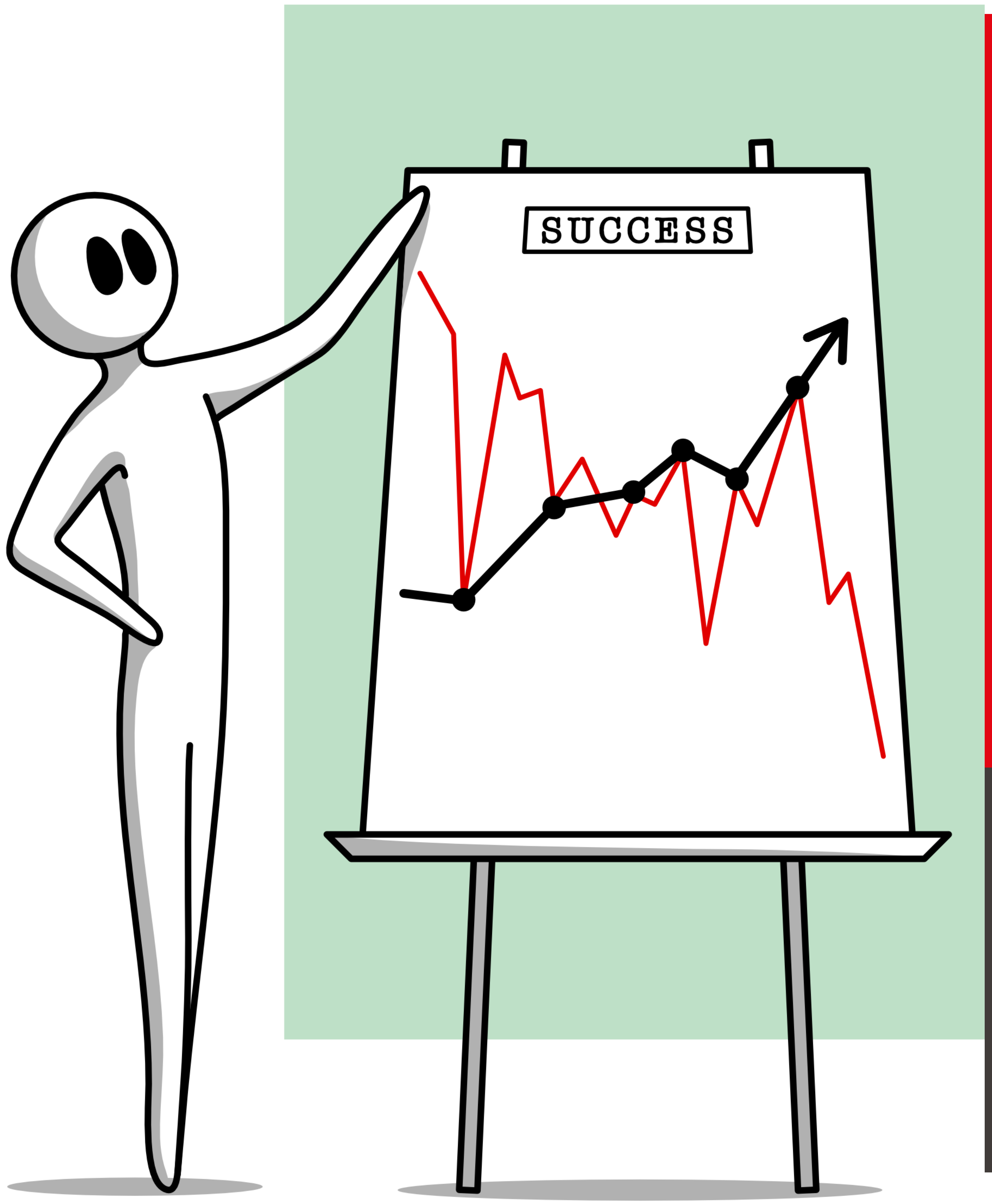
Sur ce dernier graphe apparaît en traitillé la borne supérieure $\frac{1}{\pi f T_c}$ qu'on vient de calculer

Filtrage : conclusion

- Un filtre passe-bas sert donc à supprimer ou atténuer les hautes fréquences dans un signal.

- Par la suite, nous verrons une autre application importante des filtres passe-bas.

EPFL



Information, Calcul et Communication

Échantillonnage de signaux

Olivier Lévêque

École polytechnique fédérale de Lausanne

Échantillonnage d’un signal

- Comment représenter un signal physique de nature analogique (par exemple, une onde sonore ou électromagnétique) sous forme numérique, c’est-à-dire sous la forme d’une suite de 0 et de 1 ?

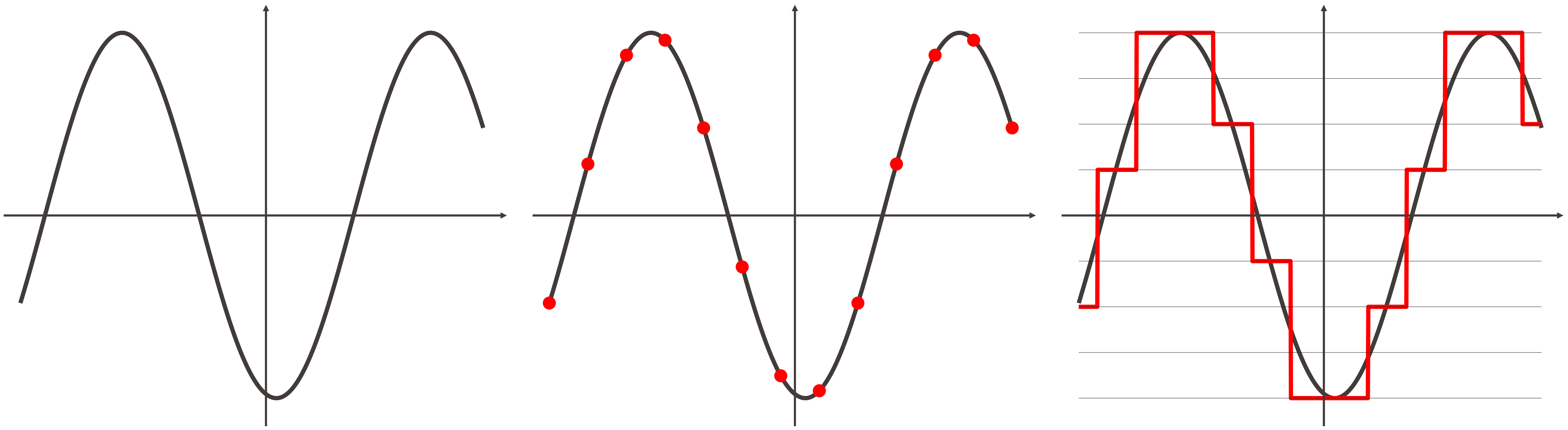
- Pour pouvoir **traiter l’information** contenue dans un signal $(X(t), t \in \mathbb{R})$, il faut :

1. **échantillonner** le signal à des instants discrets
2. **quantifier** les valeurs du signal à ces instants

- **Question naturelle** : Que perd-on du signal d’origine à travers ces deux opérations successives?

Échantillonnage d'un signal

- signal d'origine
- signal échantillonné
- signal échantillonné et quantifié

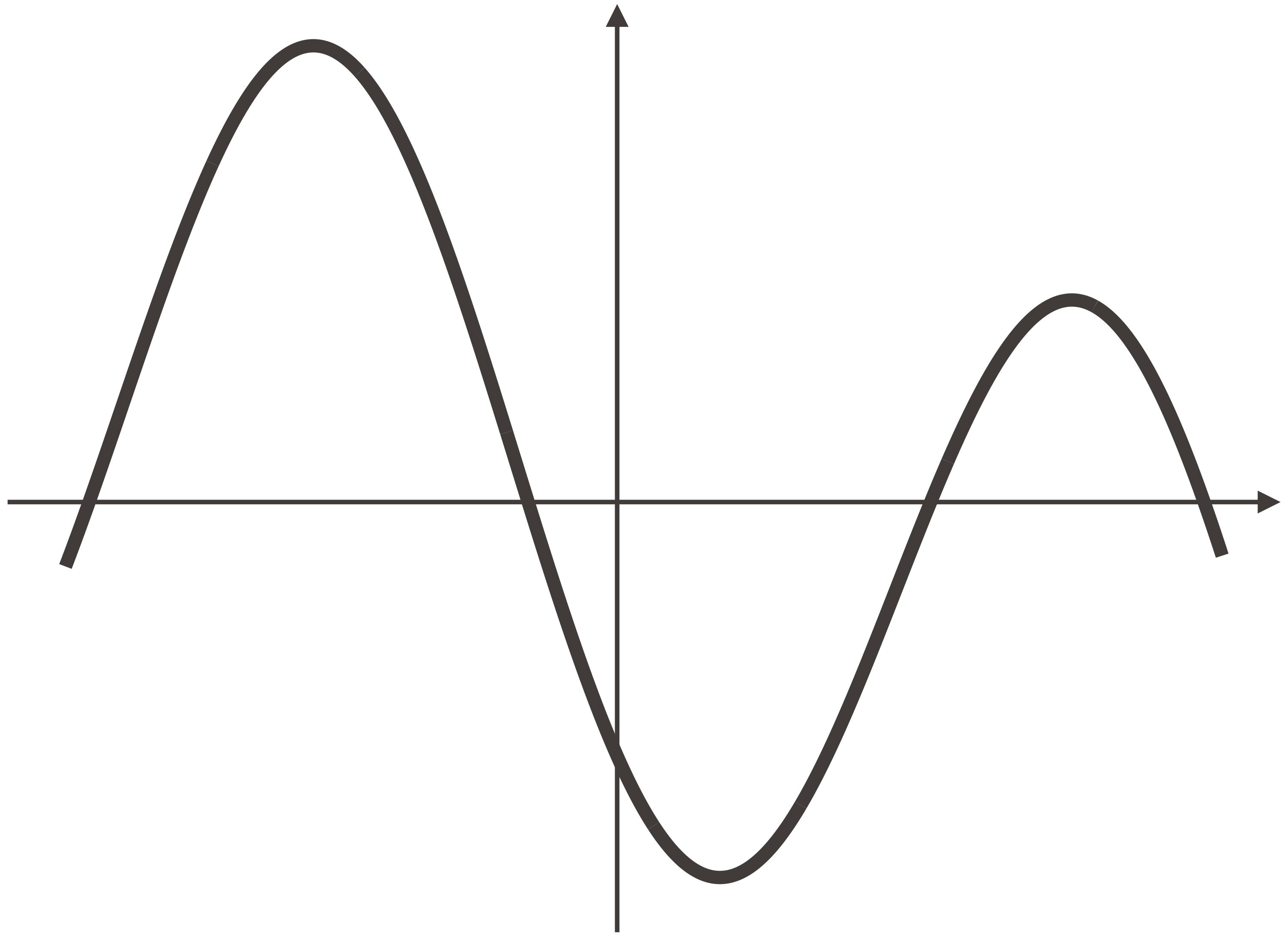


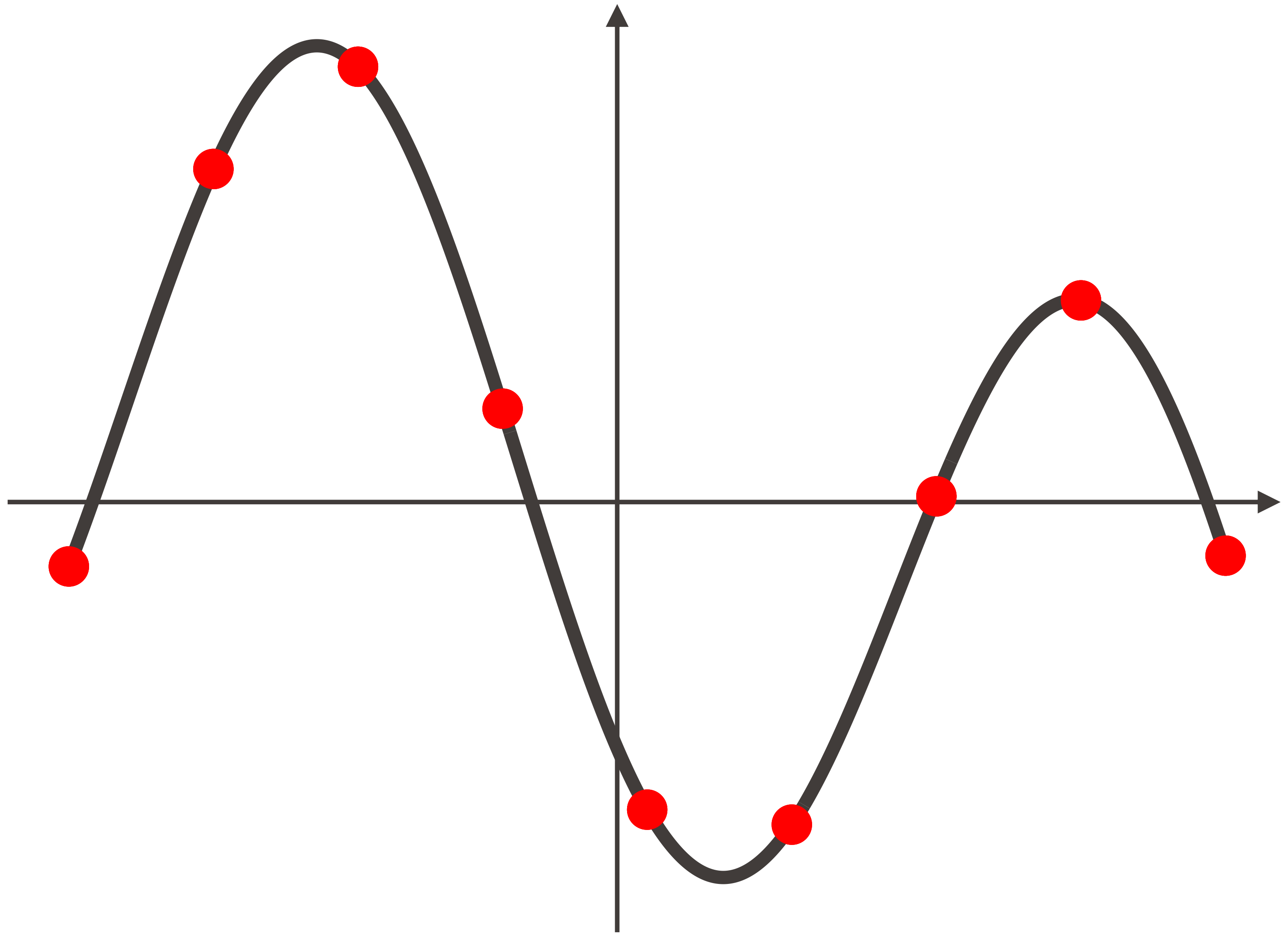
Information, Calcul et Communication

Échantillonnage d'un signal

- Nous nous concentrerons ici sur la partie « **échantillonnage** » :

signal entrant $(X(t), t \in \mathbb{R})$ → **ÉCHANTILLONNEUR** → signal échantillonné $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$

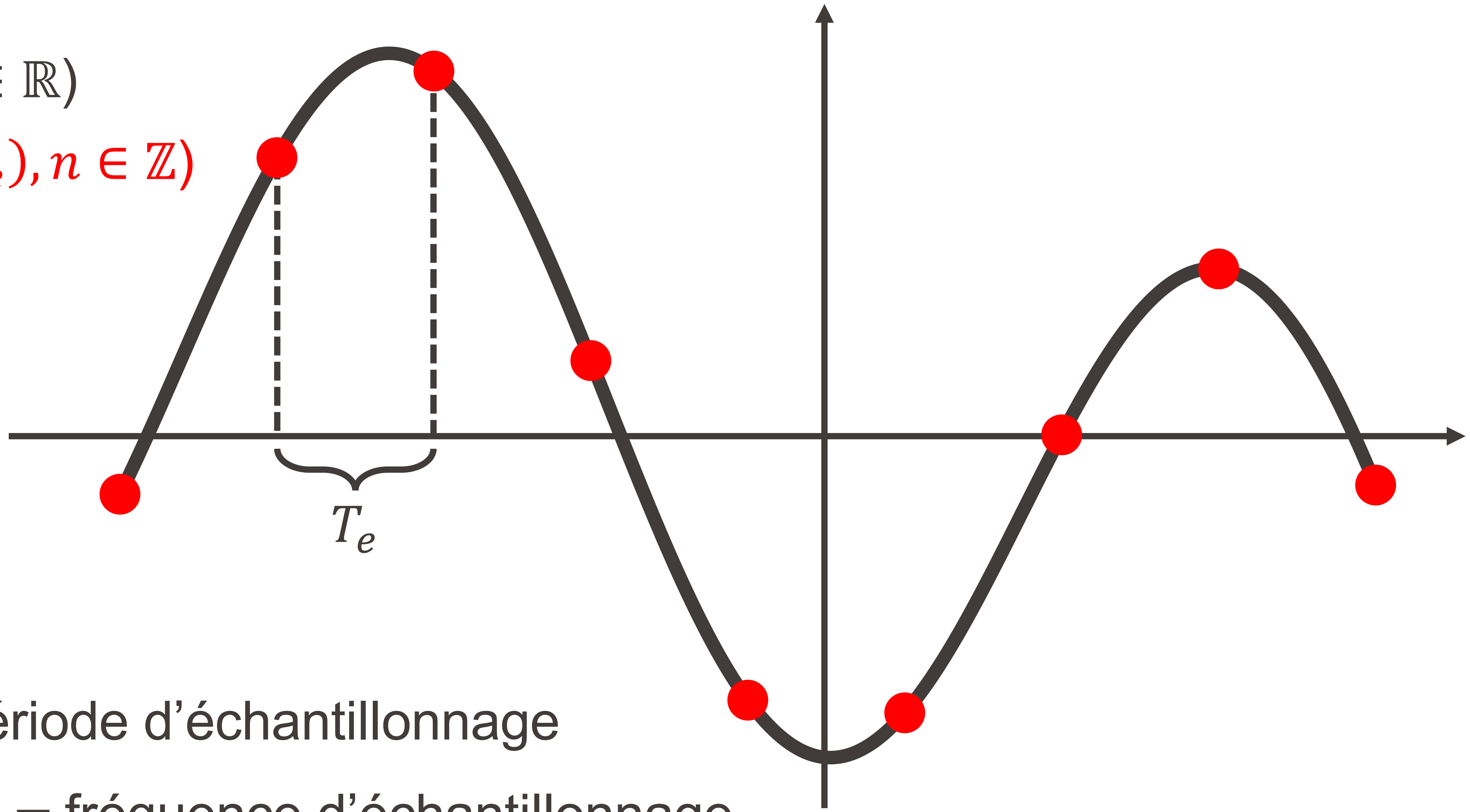




Période et fréquence d'échantillonnage

$(X(t), t \in \mathbb{R})$

$\rightarrow (X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$



- T_e = période d'échantillonnage
- $f_e = \frac{1}{T_e}$ = fréquence d'échantillonnage

Période d'échantillonnage T_e

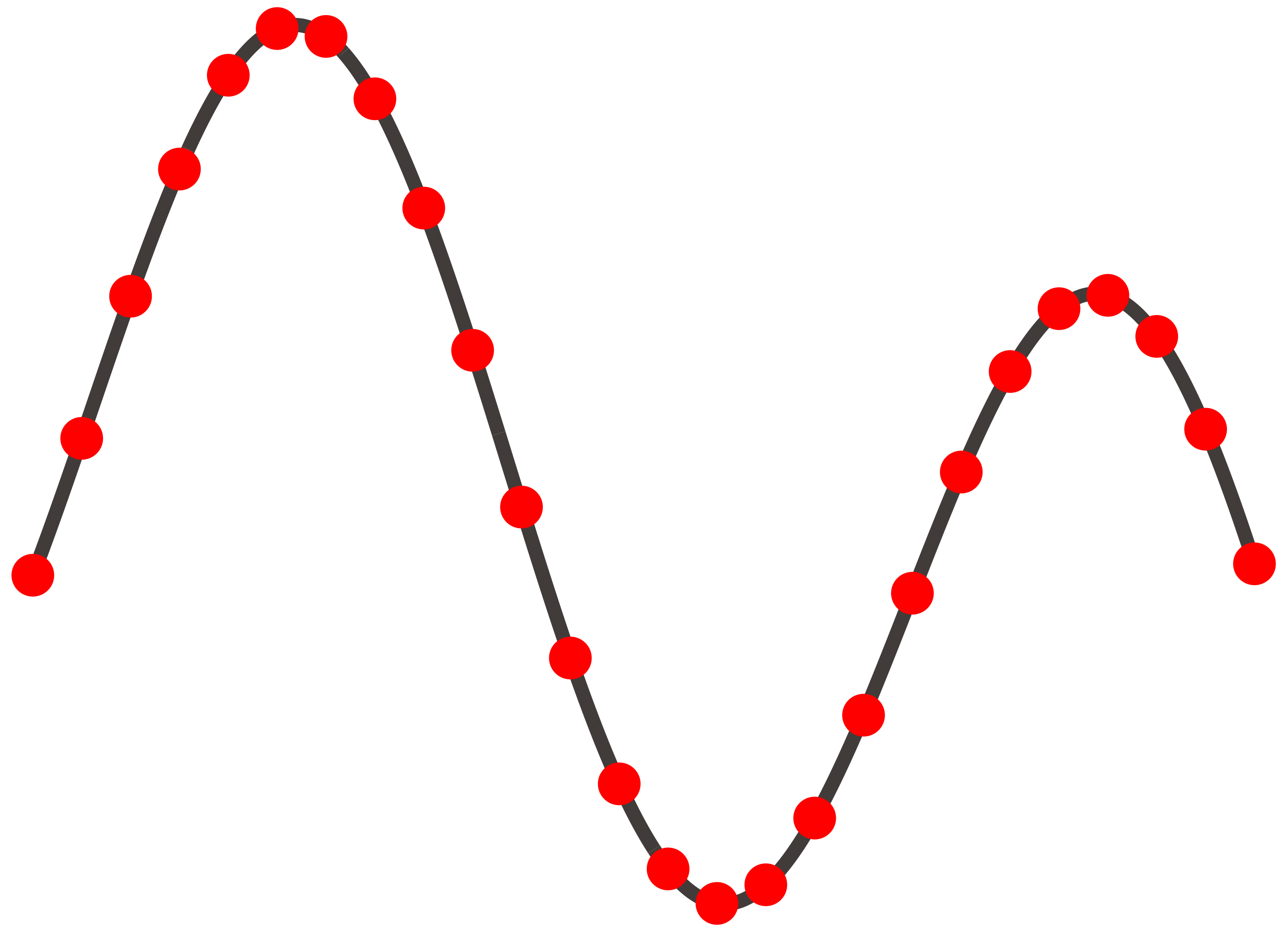
Quelle période d'échantillonnage T_e est la «bonne» ?

Période d'échantillonnage T_e

Quelle période d'échantillonnage T_e est la «bonne» ?

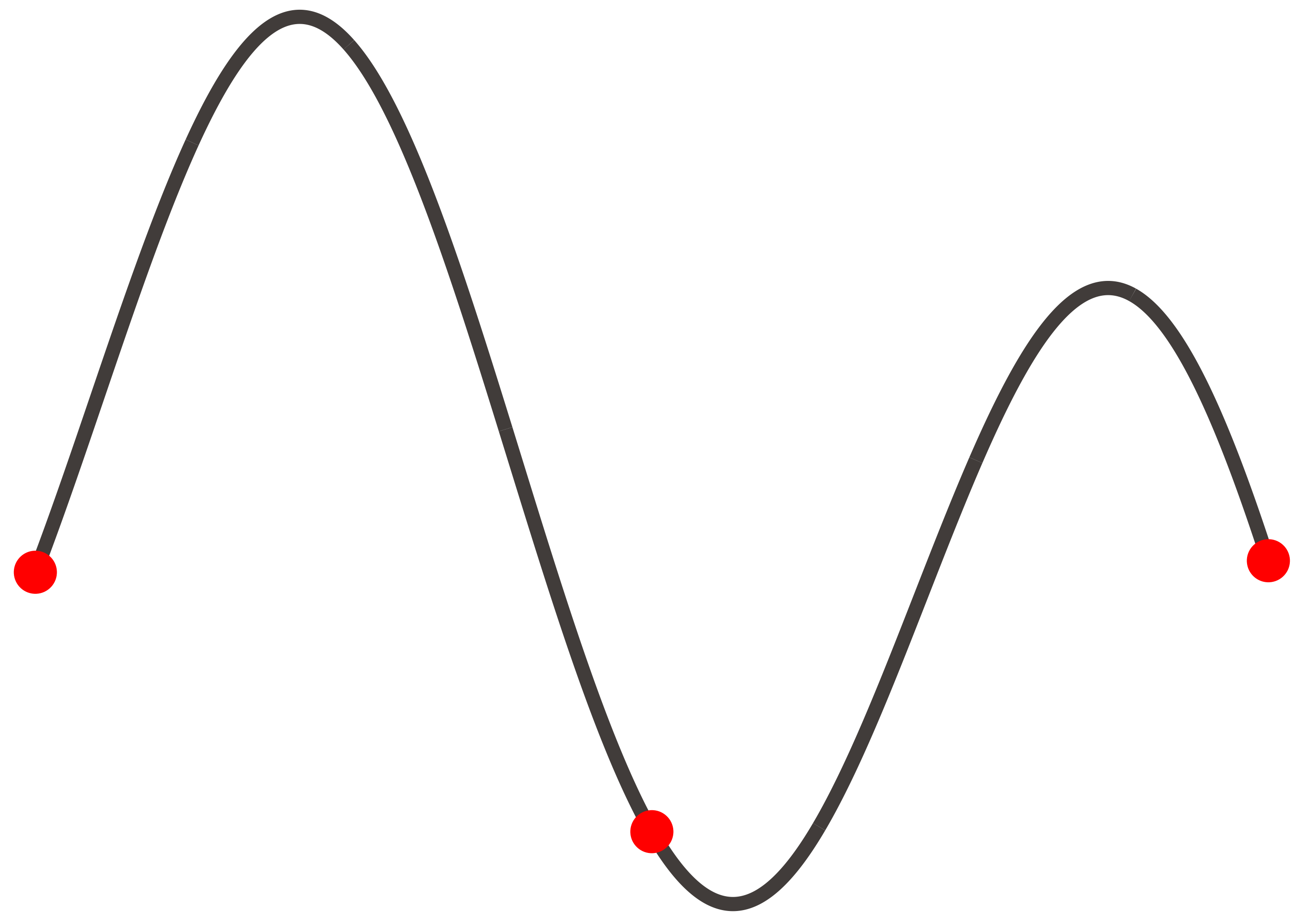
- T_e trop petite:

  trop d'information à traiter...



- T_e trop grande:

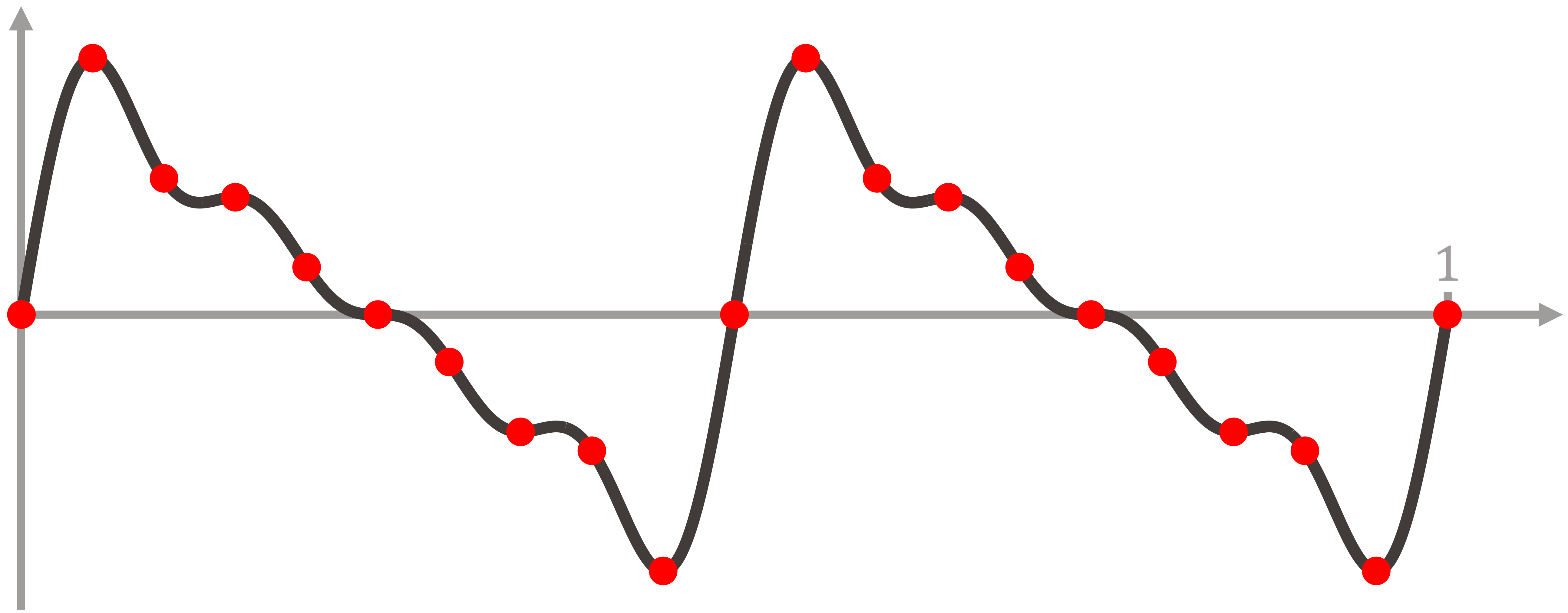
  de l'information est perdue...



T_e ne peut pas être aussi grande qu'on veut

Exemple: reprenons le signal vu précédemment :

$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t) + \frac{1}{4}\sin(16\pi t)$$

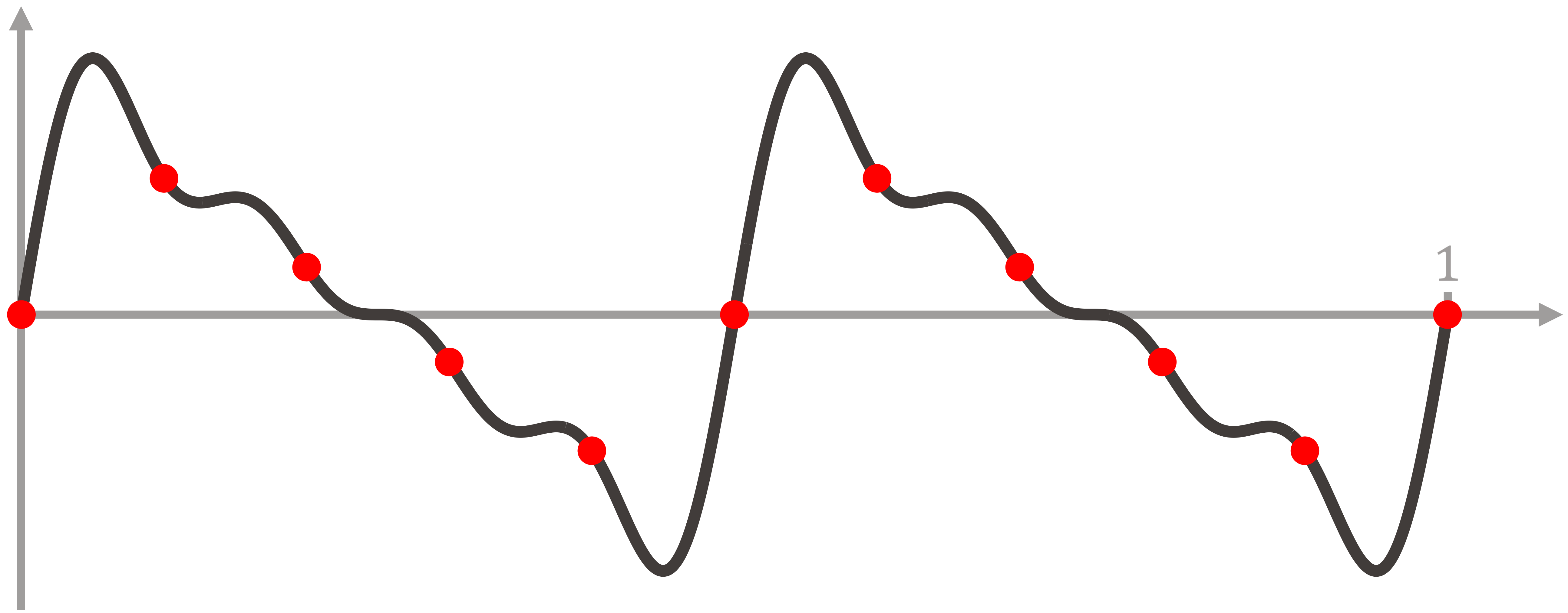


- Période d'échantillonnage $T_e = 0.05$ sec ($f_e = 20\ Hz$)

T_e ne peut pas être aussi grande qu'on veut

Exemple: reprenons le signal vu précédemment :

$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t) + \frac{1}{4}\sin(16\pi t)$$

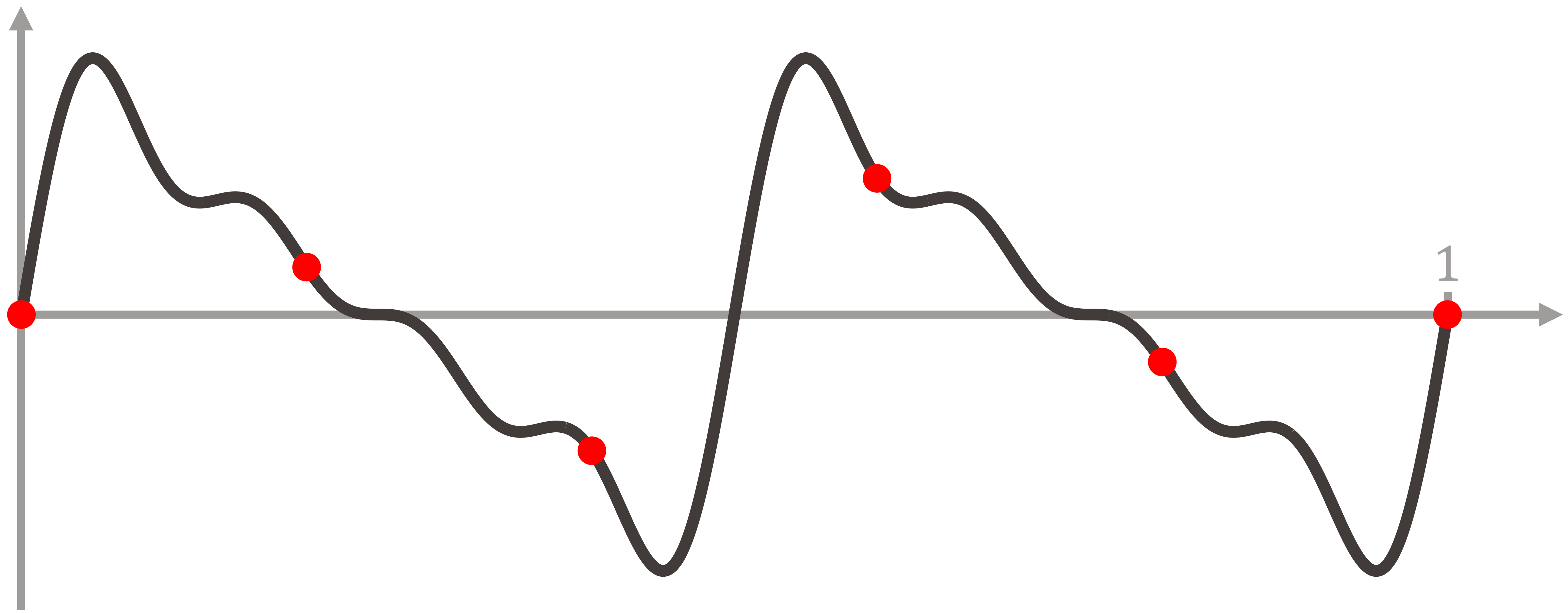


- Période d'échantillonnage $T_e = 0.1 \text{ sec } (f_e = 10\ Hz)$

T_e ne peut pas être aussi grande qu'on veut

Exemple: reprenons le signal vu précédemment :

$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t) + \frac{1}{4}\sin(16\pi t)$$

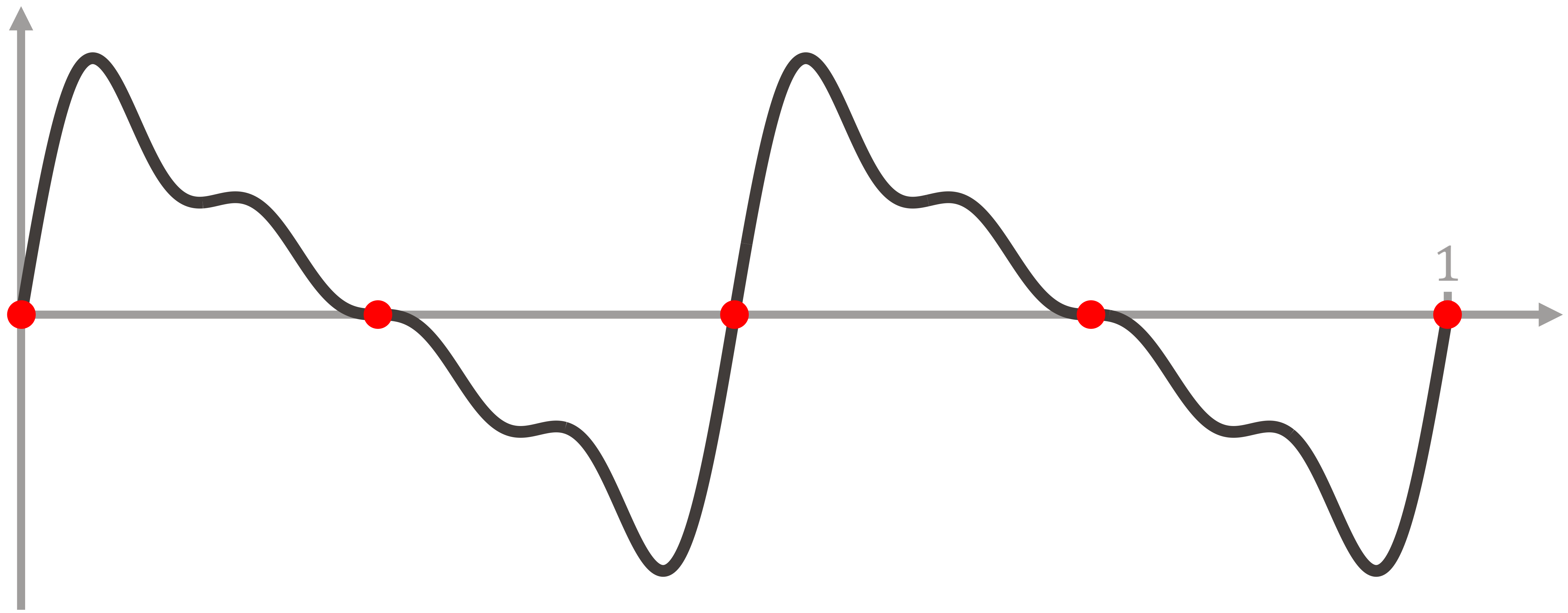


- Période d'échantillonnage $T_e = 0.2$ sec ($f_e = 5\ Hz$)

T_e ne peut pas être aussi grande qu'on veut

Exemple: reprenons le signal vu précédemment :

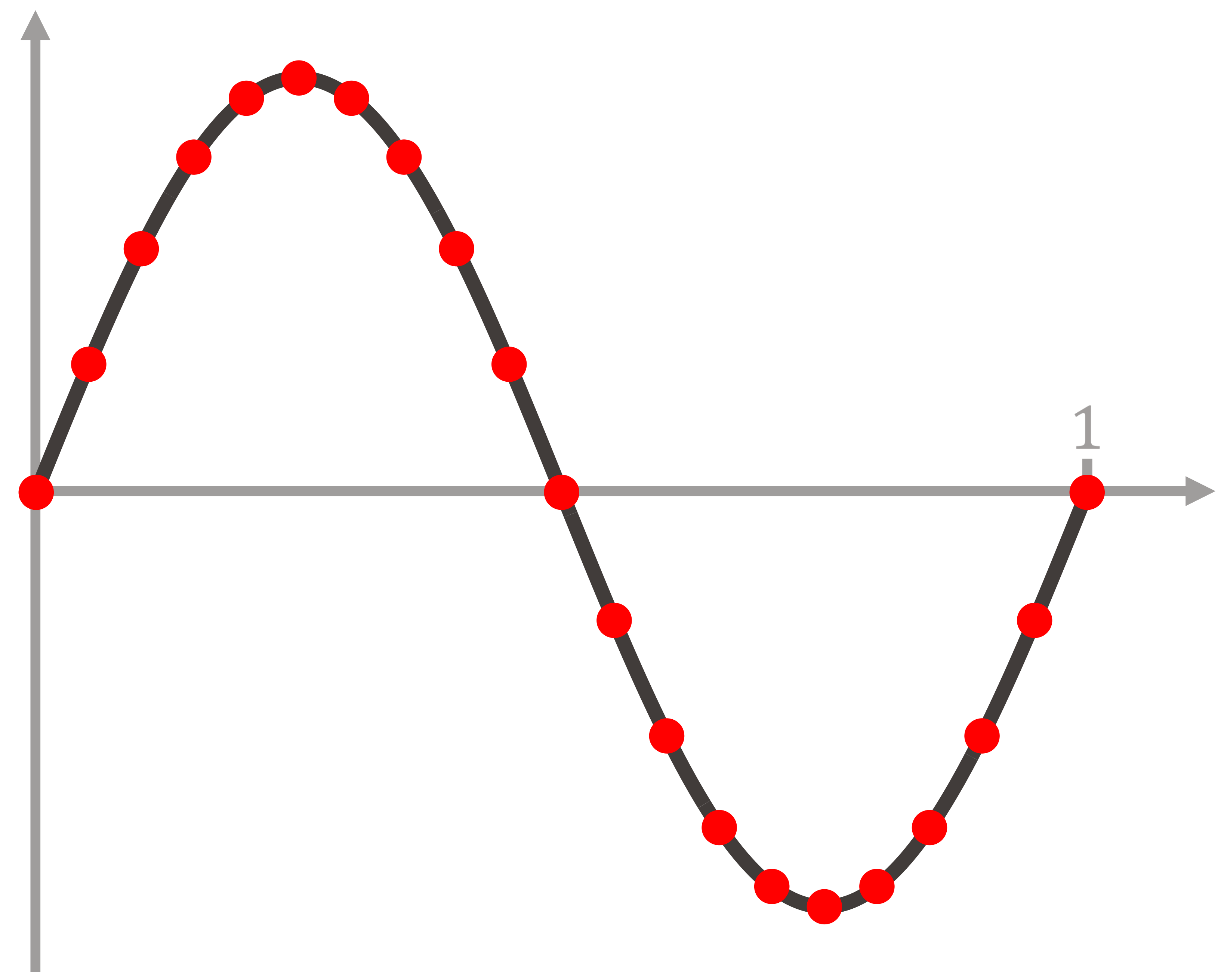
$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t) + \frac{1}{4}\sin(16\pi t)$$



- Période d'échantillonnage $T_e = 0.25 \text{ sec } (f_e = 4\ Hz)$

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

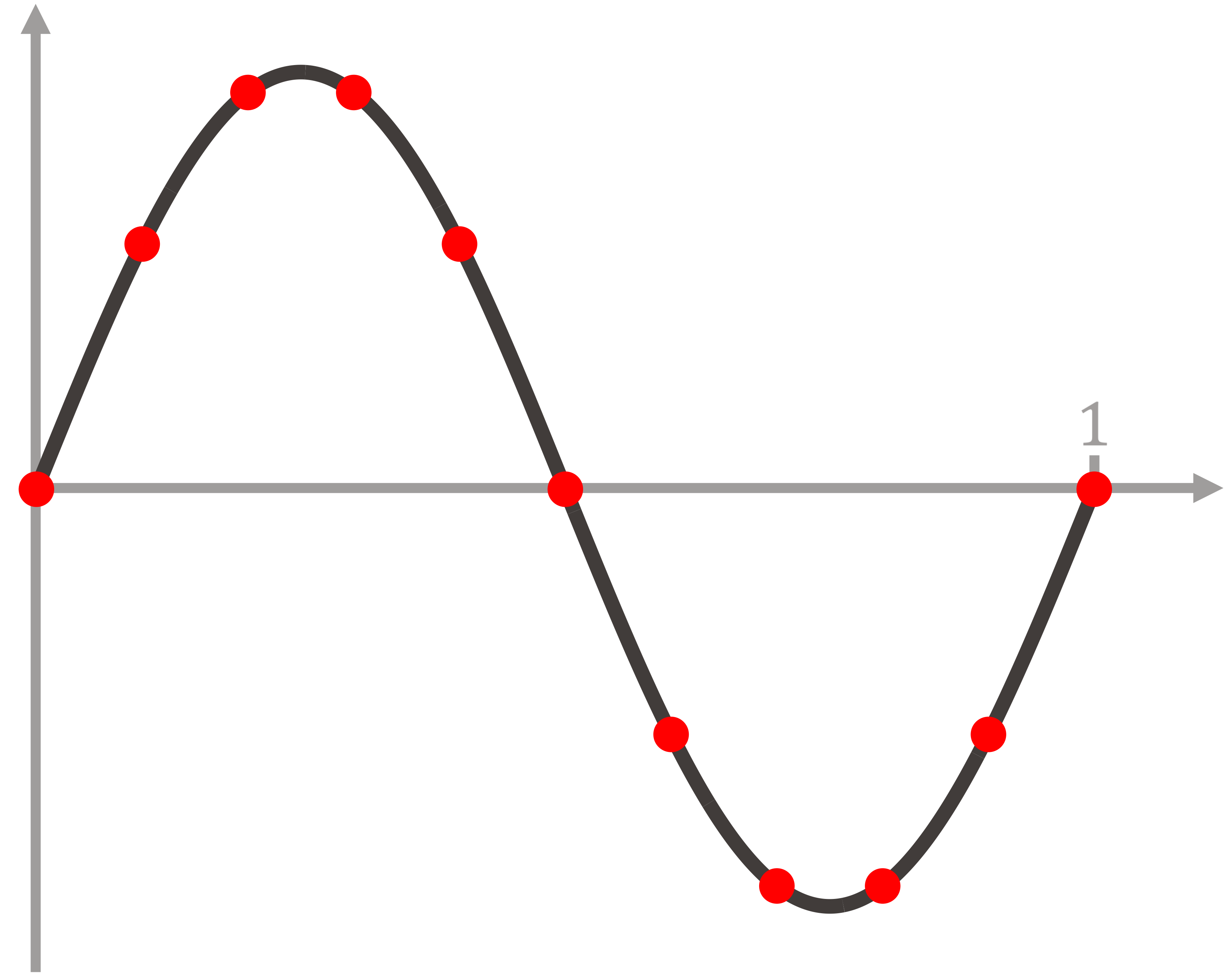
Autre exemple : sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi t)$ $\quad (f = 1Hz)$



- Période d'échantillonnage $T_e = 0.05 \text{ sec } (f_e = 20 \ Hz)$

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

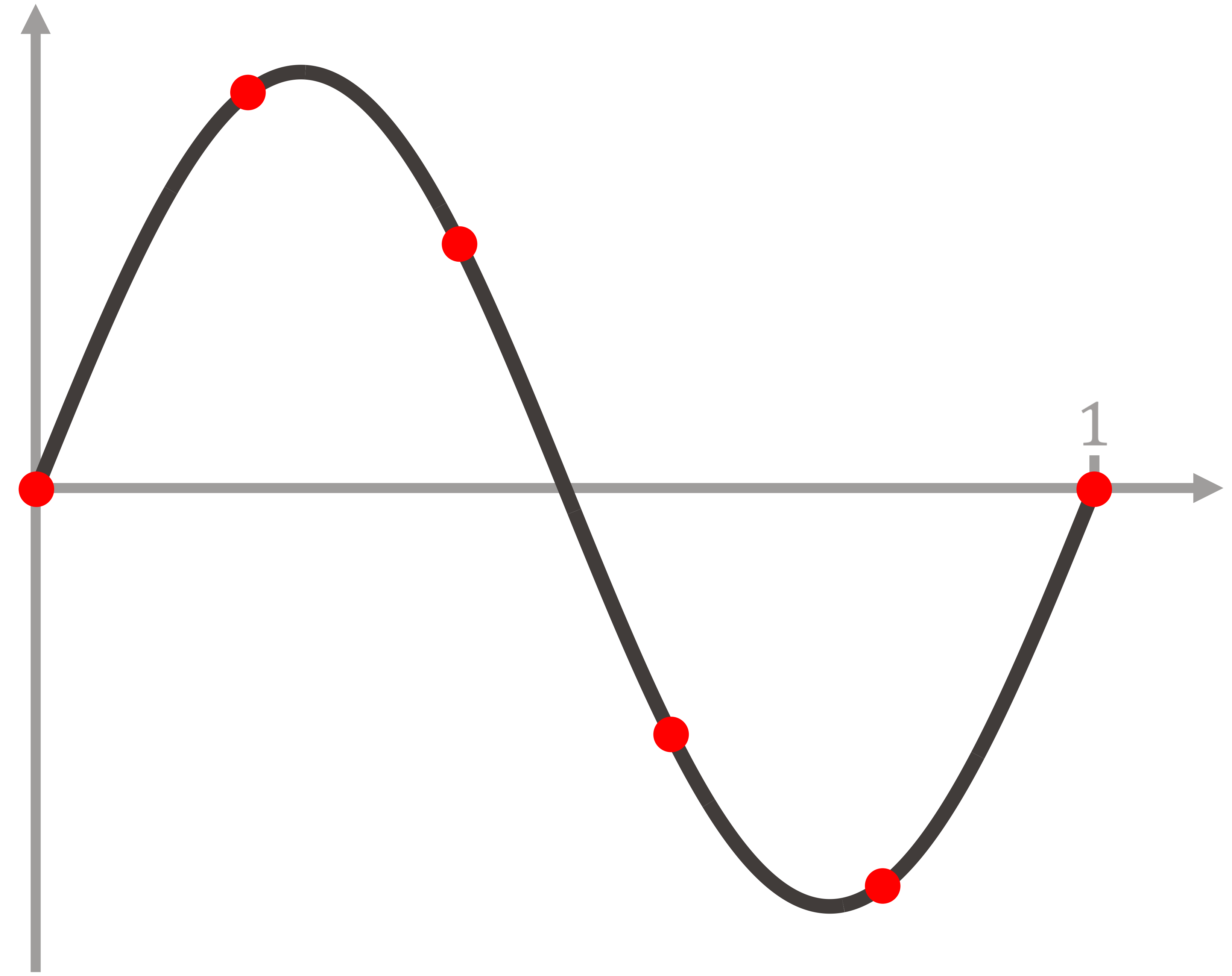
Autre exemple : sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi t) \quad (f = 1Hz)$



- Période d'échantillonnage $T_e = 0.1 \text{ sec } (f_e = 10\ Hz)$

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

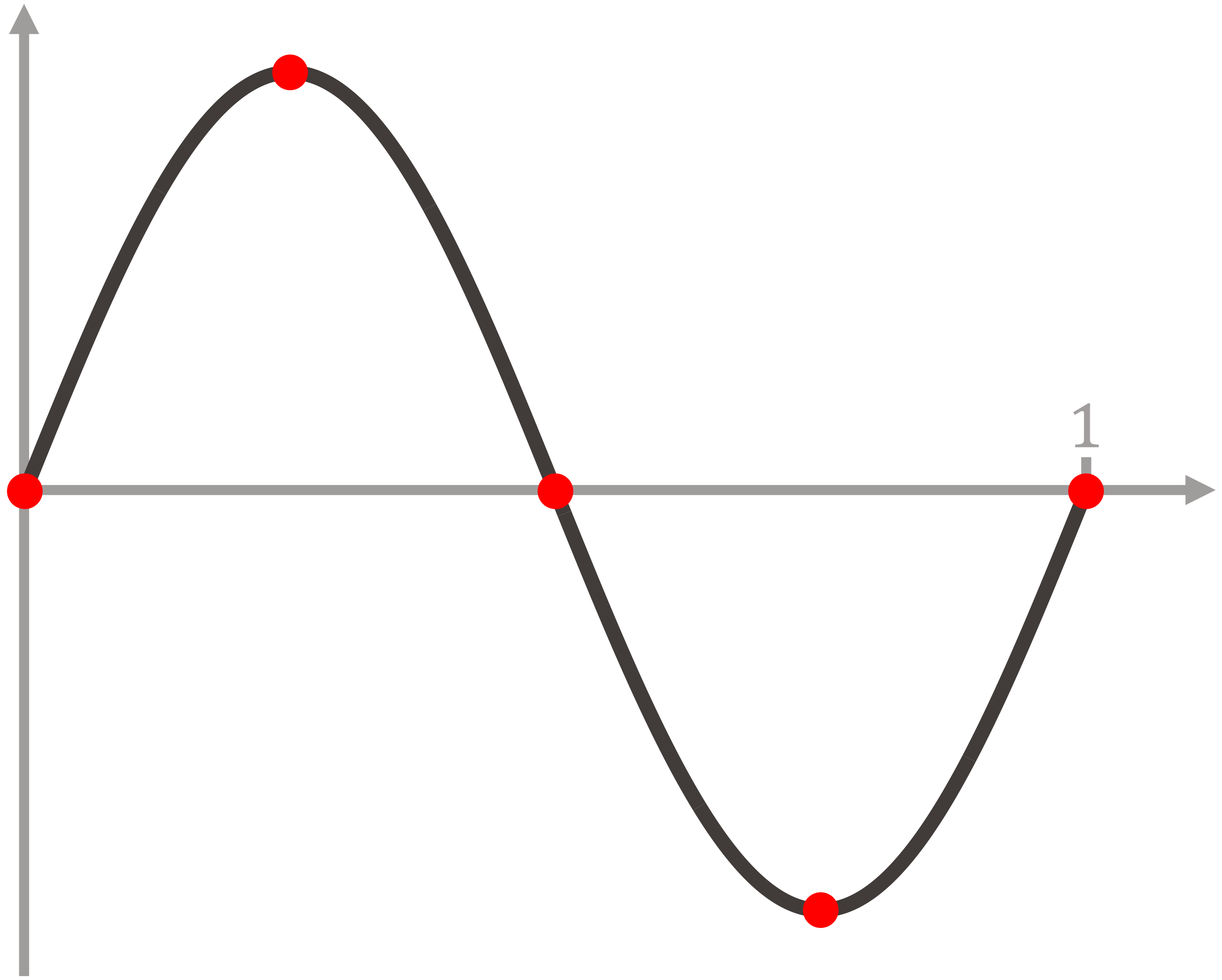
Autre exemple : sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi t) \quad (f = 1Hz)$



- Période d'échantillonnage $T_e = 0.2 \text{ sec} \, (f_e = 5 \ Hz)$

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

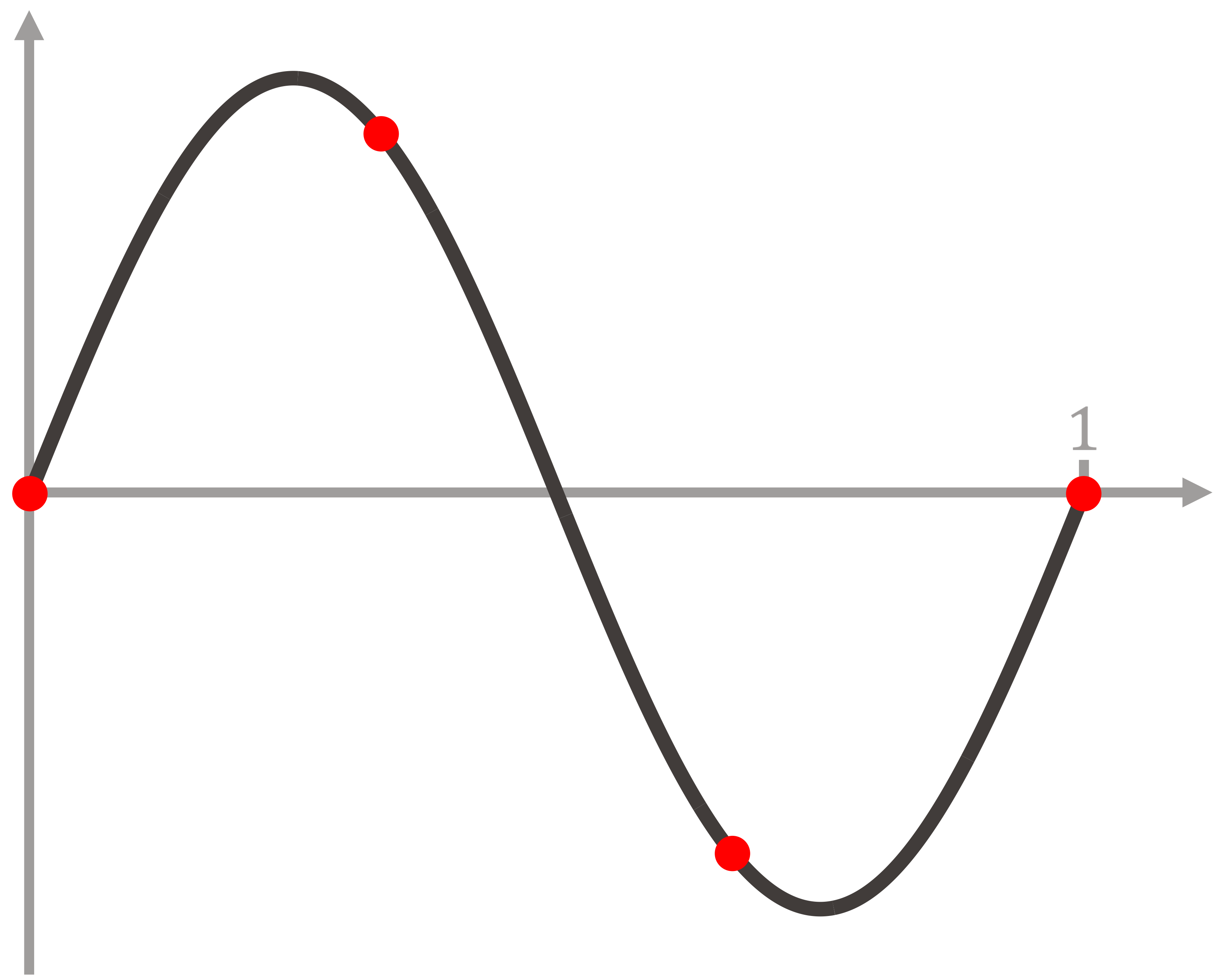
Autre exemple : sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi t) \quad (f = 1Hz)$



- Période d'échantillonnage $T_e = 0.25\text{ sec } (f_e = 4\ Hz)$

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

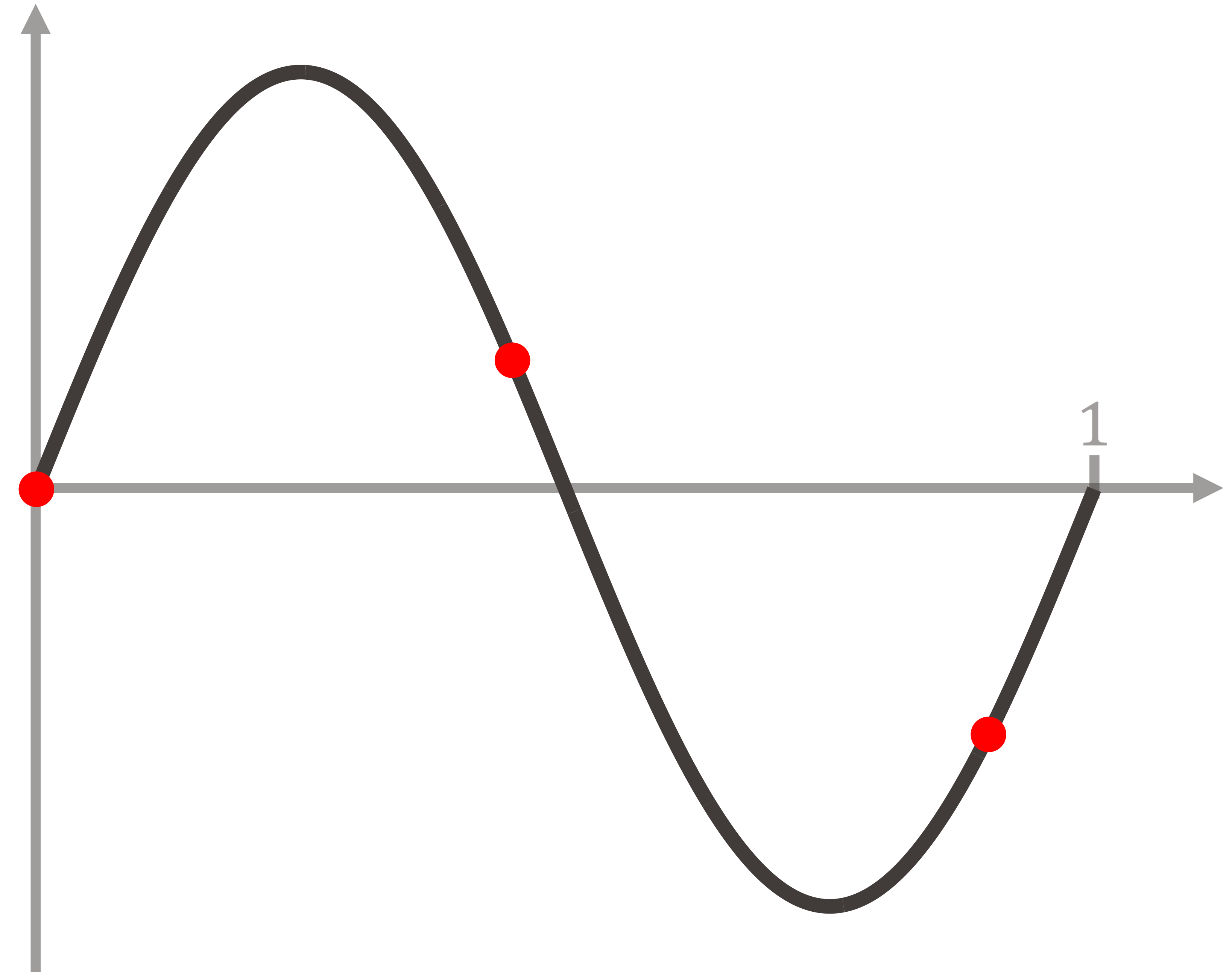
Autre exemple : sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi t)$ $(f = 1Hz)$



- Période d'échantillonnage $T_e = 0.\overline{3}$ sec $(f_e = 3\ Hz)$

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

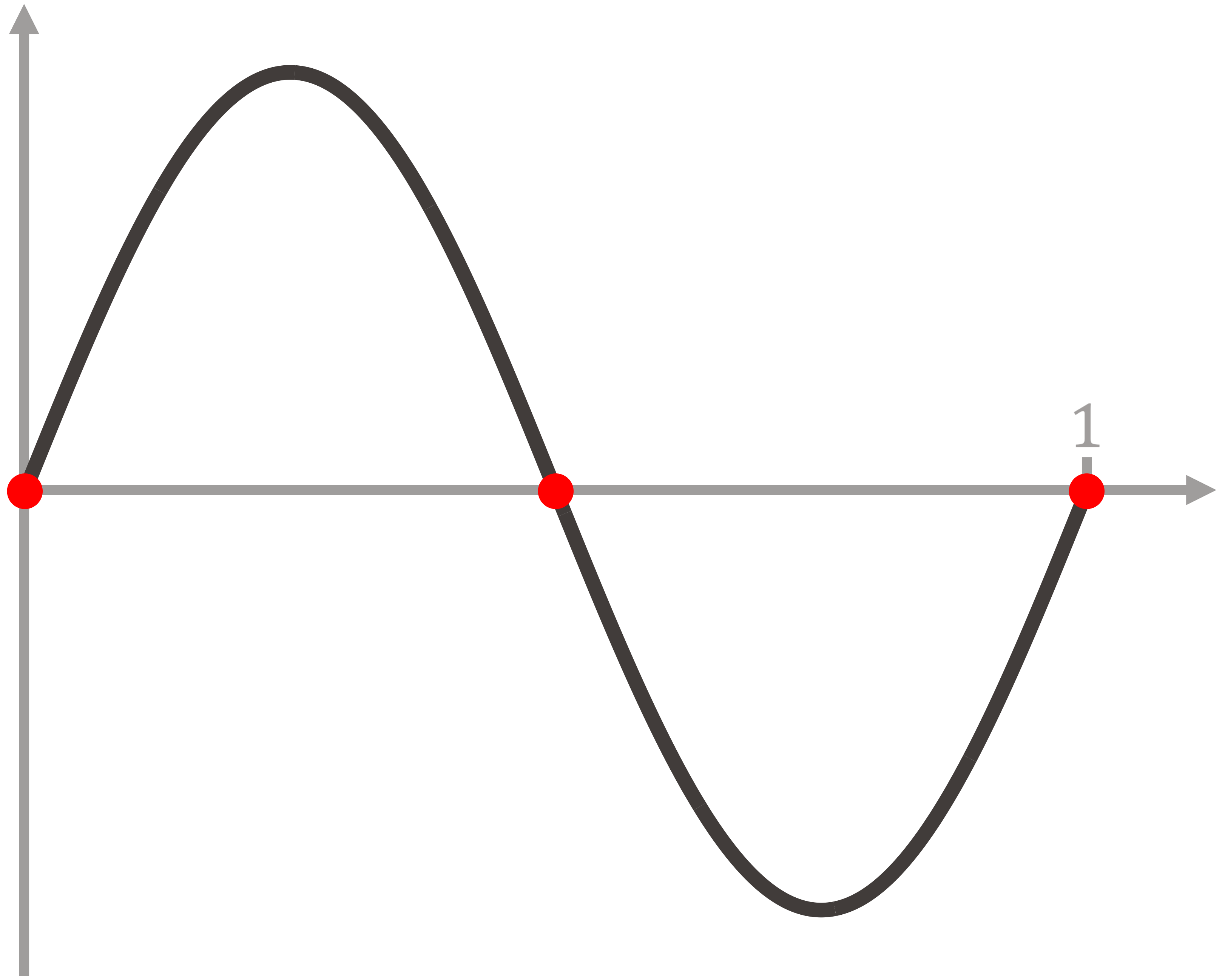
Autre exemple : sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi t) \quad (f = 1Hz)$



- Période d'échantillonnage $T_e = 0.45 \text{ sec } (f_e = 2.\overline{2}\ Hz)$

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

Autre exemple : sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi t) \quad (f = 1Hz)$

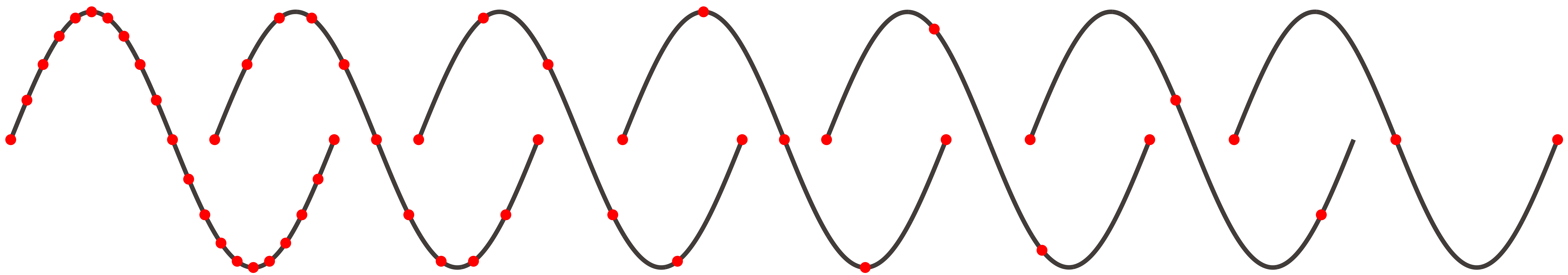


- Période d'échantillonnage $T_e = 0.5 \text{ sec } (f_e = 2\ Hz)$

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

Autre exemple : sinusoïde pure

$$X(t) = \sin(2\pi t) \quad (f = 1\ Hz)$$



Pour pouvoir reconstruire la sinusoïde à partir de l'échantillon, il est nécessaire que $T_e < 0.5\ sec$, autrement dit, que $f_e = \frac{1}{T_e} > 2\ Hz.$

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

- De manière plus générale, on peut dire la chose suivante :

Soit $X(t)$ une sinusoïde pure dont la fréquence est plus petite ou égale à f.

Pour pouvoir reconstruire cette sinusoïde à partir de sa version échantillonnée à la fréquence f_e, il est nécessaire que :

$$f_e > 2f \qquad \left(\underline{f_e > 2B}\right)$$

- Le **théorème d'échantillonnage** que nous verrons prochainement dit (essentiellement) que cette condition est non seulement **nécessaire** mais aussi **suffisante**.
- Nous verrons également que **ce théorème s'applique à tous les signaux**, et pas seulement aux sinusoïdes.

Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

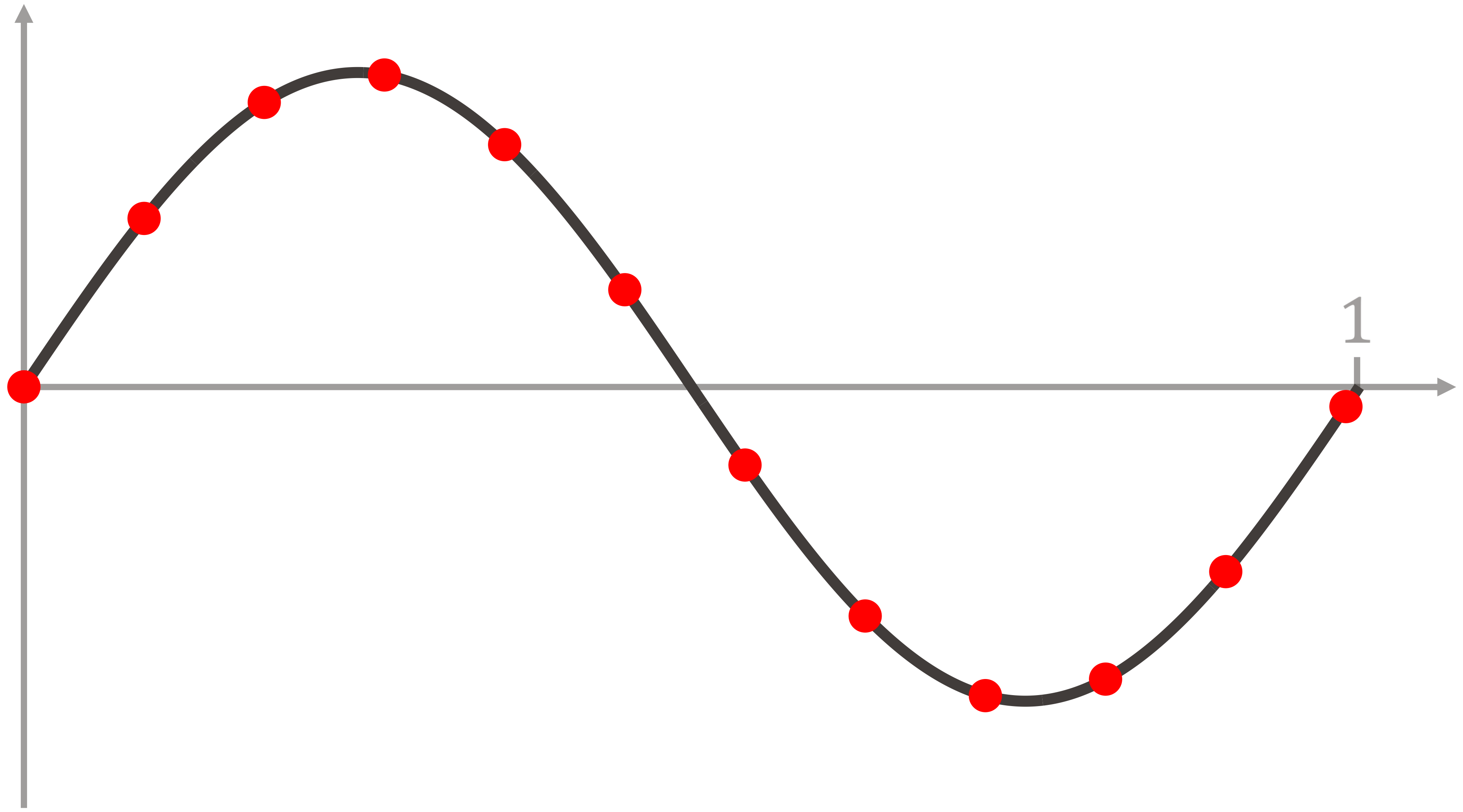
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période $T_e = 0.09 \text{ sec}$, donc $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11}\ Hz$.

  - $f = 1\ Hz$



Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

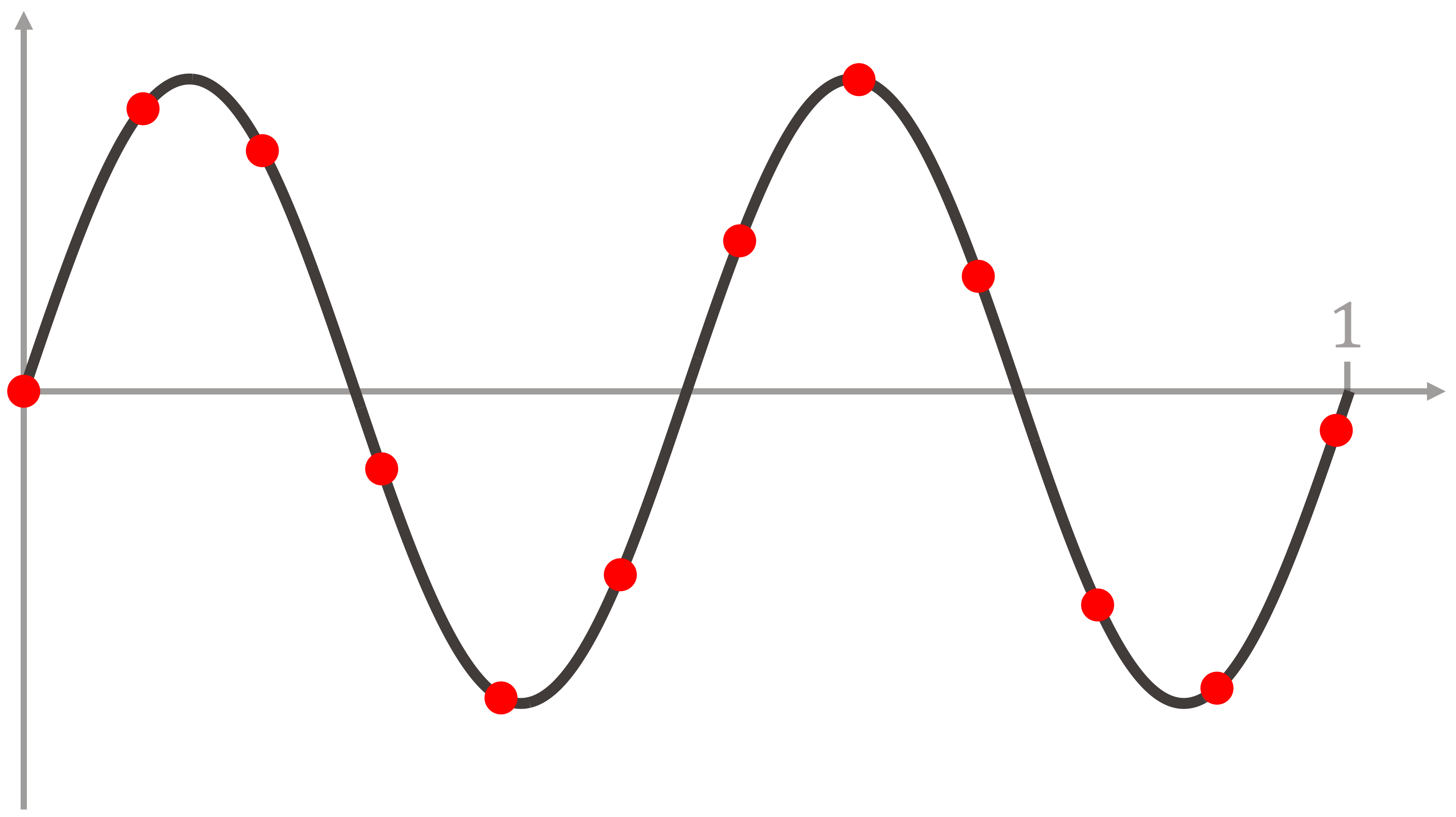
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période $T_e = 0.09 \text{ sec}$, donc $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11}\ Hz$.

  - $f = 1\ Hz$
  - $f = 2\ Hz$



Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

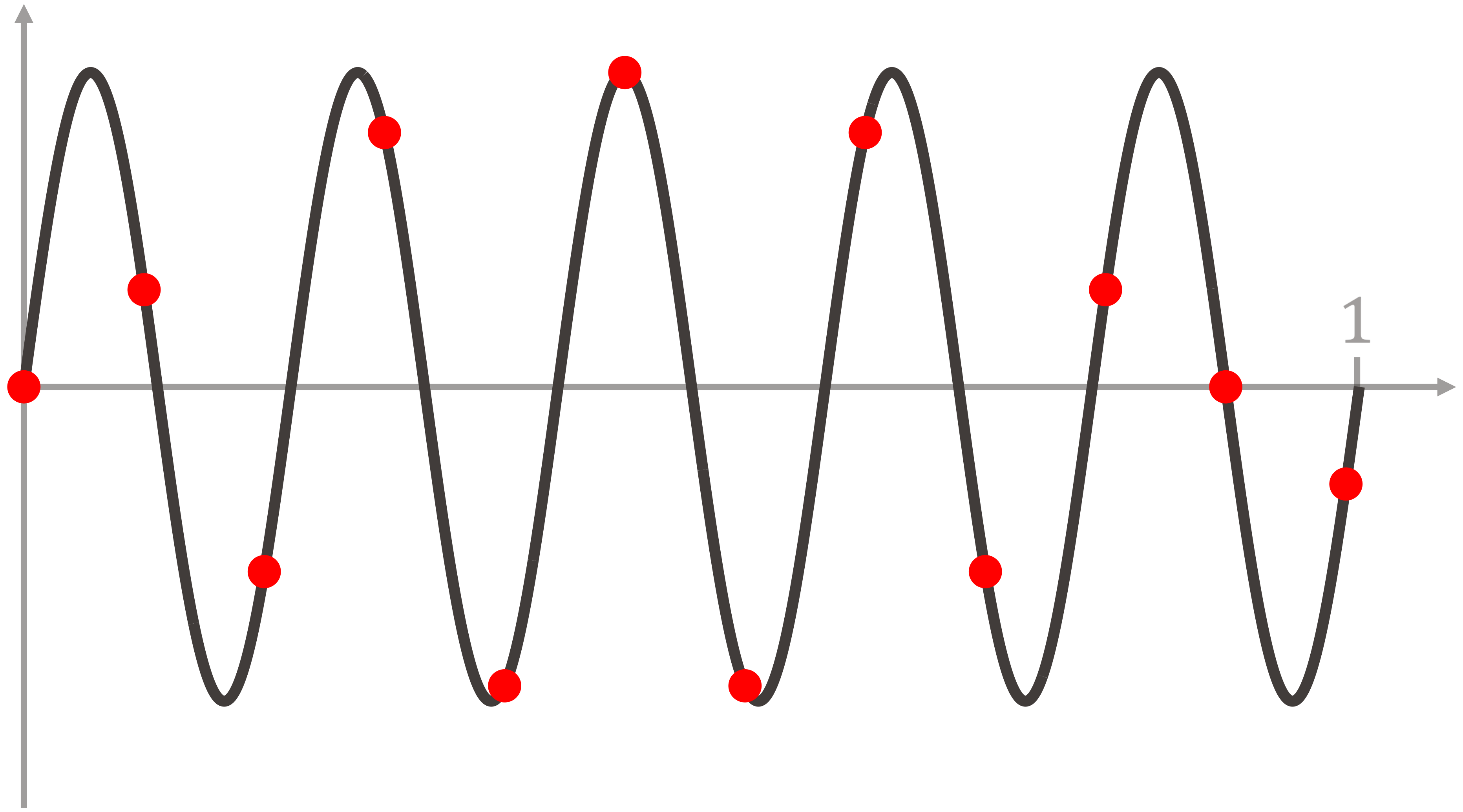
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période $T_e = 0.09 \text{ sec}$, donc $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11}\ Hz$.

  - $f = 1\ Hz$
  - $f = 2\ Hz$
  - $f = 5\ Hz$



Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

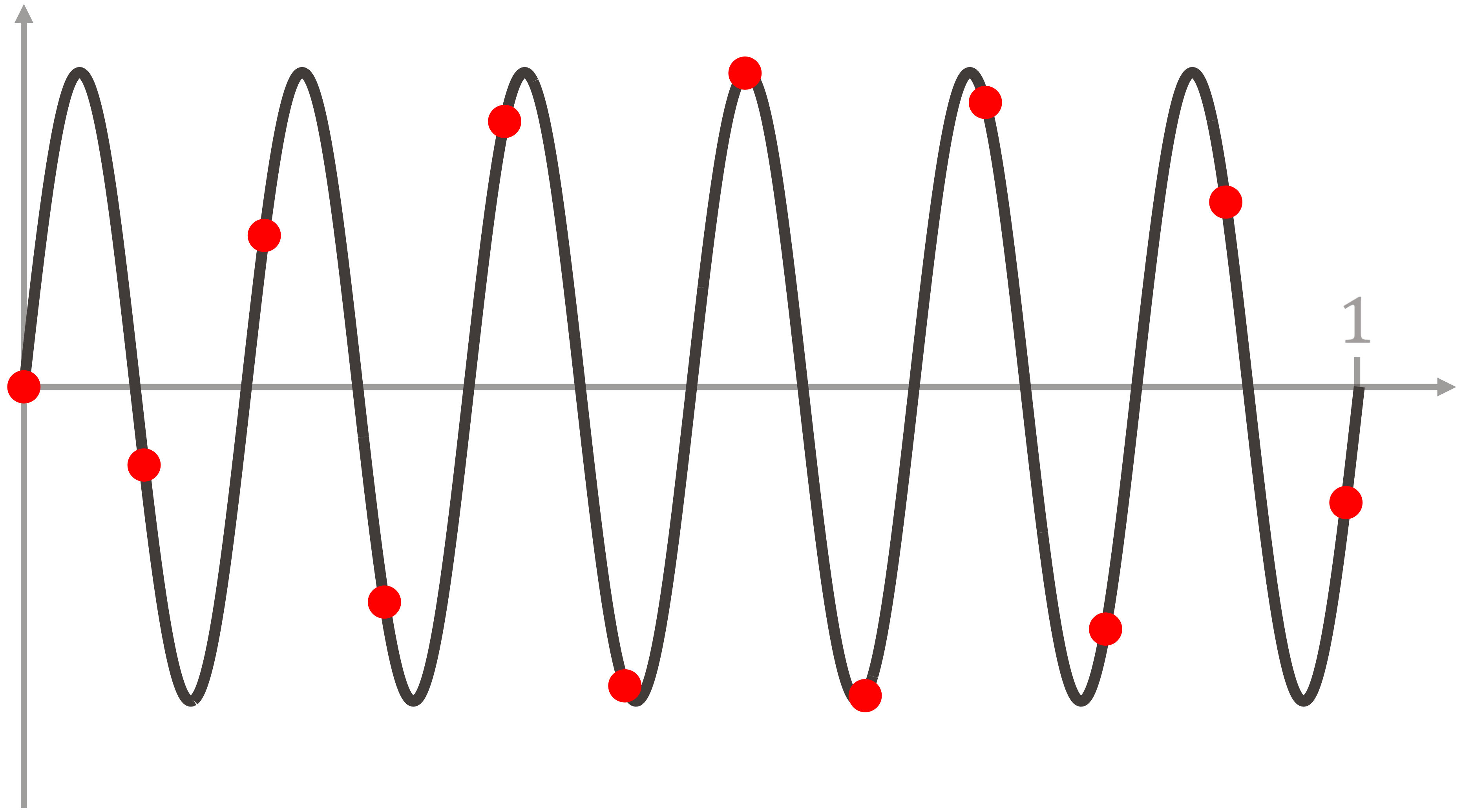
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période $T_e = 0.09 \sec$, donc $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11}\ Hz$.

  - $f = 1\ Hz$
  - $f = 2\ Hz$
  - $f = 5\ Hz$
  - $f = 6\ Hz$



Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

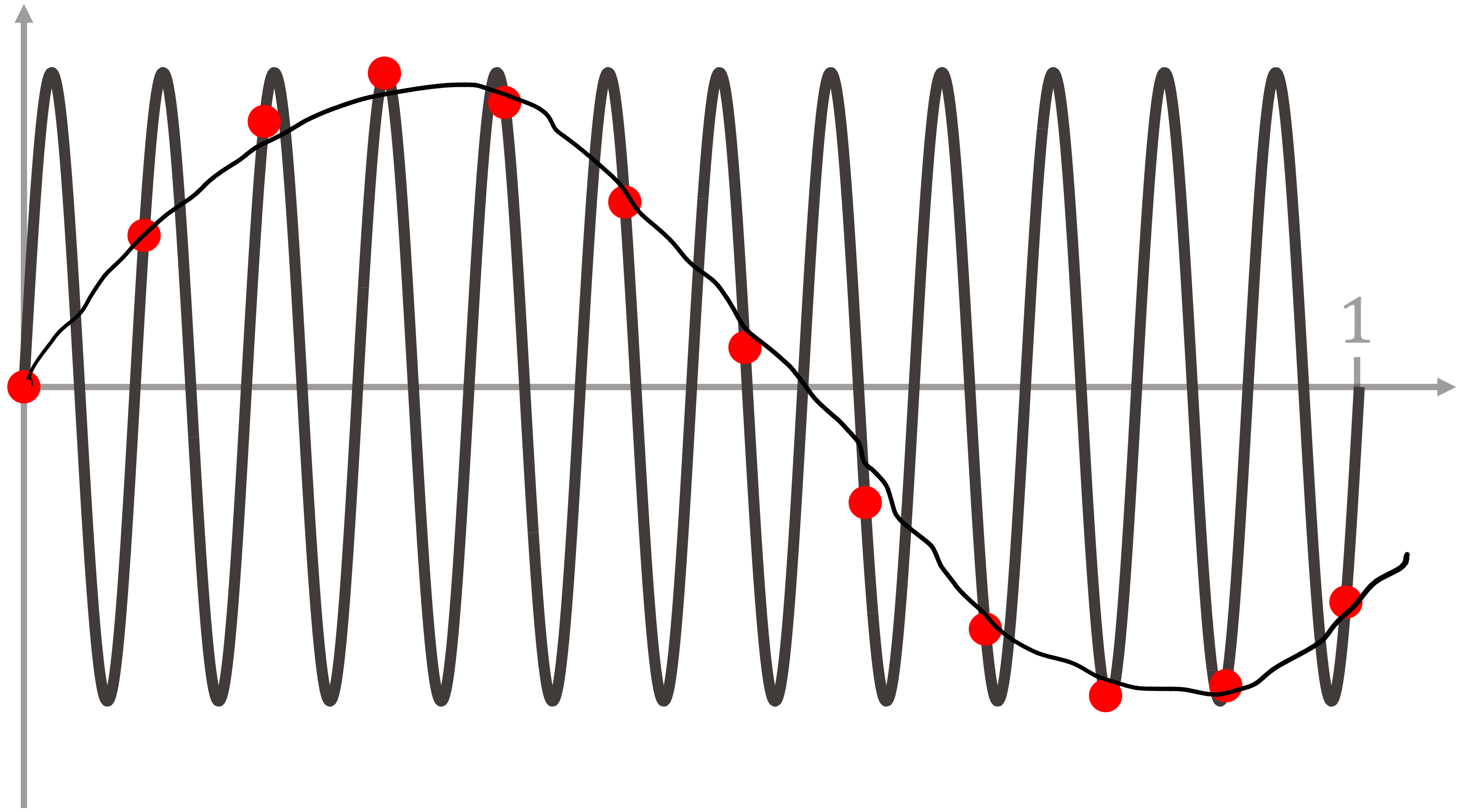
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période $T_e = 0.09 \sec$, donc $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11}\ Hz$.

- $f = 1\ Hz$
- $f = 2\ Hz$
- $f = 5\ Hz$
- $f = 6\ Hz$
- $f = 12\ Hz$



Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

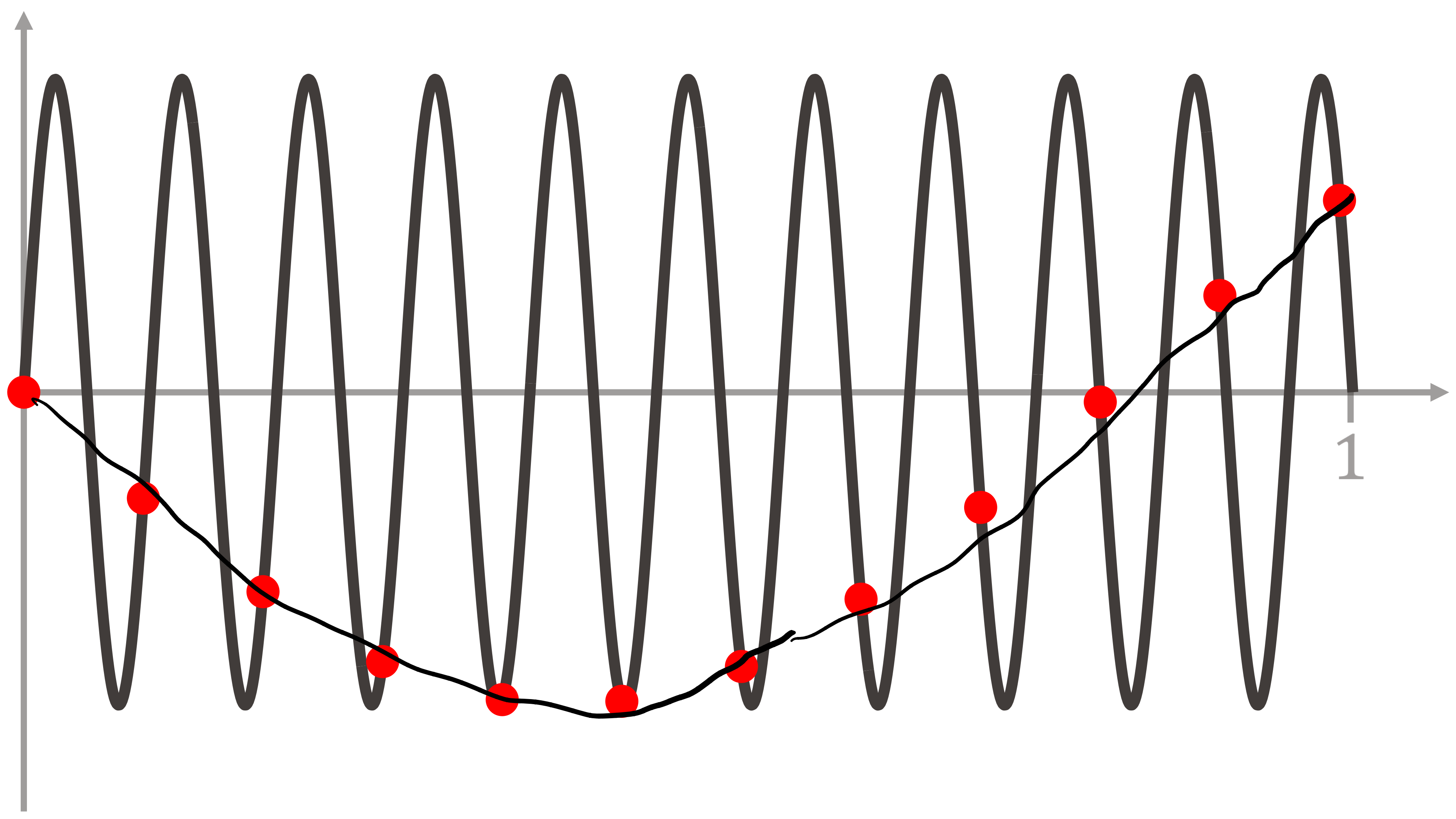
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période $T_e = 0.09\ sec$, donc $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11}\ Hz$.

- $f = 1\ Hz$
- $f = 2\ Hz$
- $f = 5\ Hz$
- $f = 6\ Hz$
- $f = 12\ Hz$
- $f = 10.5\ Hz$



Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

Dans les deux derniers cas, nous avons vu apparaître :

- une sinusoïde avec une **fréquence plus lente**
- une autre sinusoïde, avec une **fréquence plus lente et qui part d'abord vers le bas**.

Ce phénomène s'appelle l'**effet stroboscopique** et survient donc lorsqu'on **sous-échantillonne** un signal.

Effet stroboscopique : illustrations

- **Exemple visuel** (avec un sous-échantillonnage à deux dimensions) :

Effet stroboscopique : illustrations

- **Exemples de vidéos :**

  http://www.youtube.com/watch?v=jHS9JGkEOmA
  http://www.youtube.com/watch?v=LVwmtwZLG88
  https://www.youtube.com/watch?v=2IghwseoISc