Série 21

Pour le 12 mars 2025

Exercice 1

Somme des carrés. Montre que

$$\frac{n^3}{3} \leq \sum_{k=1}^{n} k^2 \leq \frac{(n+1)^3}{3}$$

pour tout $n \geq 1$.

a) Vérifie que les deux inégalités sont vraies pour $n = 1$ et $n = 2$.

b) Montre chaque inégalité séparément par récurrence en écrivant soigneusement quelle est l'hypothèse de récurrence et où tu l'utilises.

Exercice 2

Trissection des angles. Il est impossible d'effectuer la construction du tiers d'un angle θ donné à la règle et au compas (Wantzel, 1837). Le but de cet exercice est de montrer que la construction est possible avec une règle, un compas et une spirale d'Archimède !

On se donne donc cette spirale d'équation polaire $r = \phi$. Un angle θ est donné par le demi-axe Ox positif et une demi-droite issue de l'origine (l'angle est lu dans le sens trigonométrique). Cette demi-droite coupe la spirale en un point P et on trace le cercle de centre O et de rayon $\frac{|OP|}{3}$. Ce cercle coupe la spirale en un point Q.

Montre que la demi-droite $[OQ$ détermine un angle de $\theta/3$ avec le demi-axe positif Ox. Aide-toi d'un dessin.

Indication : Sous forme polaire, la spirale s'écrit donc sous la forme $(\phi \cos(\phi), \phi \sin(\phi))$.

Exercice 3

Une fonction non intégrable. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ et σ une subdivision quelconque de $[0,1]$.

a) Calcule $s_\sigma(f)$ et $S_\sigma(f)$.

b) Calcule $s(f)$ et $S(f)$.

c) Conclus que $s(f) \neq S(f)$ et donc que f n'est pas intégrable.

Exercice 4

L'intégrale définie d'une fonction affine. On considère la fonction $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$. On cherche à calculer l'aire de la région comprise entre Ox et le graphe de cette fonction.

a) Écris explicitement la subdivision régulière σ_n de $[0,a]$ d'ordre n.

b) Détermine le minimum m_i et le maximum M_i de f sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ et justifie les réponses.

c) Calcule l'aire du rectangle de base $[x_{i-1}, x_i]$ et de hauteur m_i (puis celui de hauteur M_i).

d) Calcule les sommes de Darboux inférieure et supérieure de f pour σ_n.

e) Calcule la limite de ces sommes de Darboux lorsque n tend vers l'infini.

f) Conclus que f est intégrable et que l'aire de la région cherchée est $\dfrac{a^2}{4} + a$.

g) Retrouve cette même valeur par un argument géométrique.

Exercice 5

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) Une fonction intégrable est continue.

b) Toutes les fonctions sont intégrables.

c) Une fonction intégrable est bornée.

d) Si f est bornée et définie sur $[a, b]$ et que $s(f)$ et $S(f)$ existent, alors $s(f) = S(f)$.

e) Les nombres $1/64 < 1/32 < 1/16 < 1/8 < 1/4 < 1/2 < 1$ forment une subdivision de $[0, 1]$.

f) Les nombres $0 < 1/64 < 1/32 < 1/16 < 1/8 < 1/4 < 1/2 < 1$ forment une subdivision de $[0, 1]$.

g) Les nombres $0 < 1/64 < 1/32 < 1/16 < 1/8 < 1/4 < 1/2 < 1$ forment une subdivision de $[0, 1]$ de pas $1/64$.

h) Les nombres $0 < 1/64 < 1/32 < 1/16 < 1/8 < 1/4 < 1/2 < 1$ forment une subdivision de $[0, 1]$ de pas $1/2$.

i) Archimède était italien.

Exercice 6

La fonction exponentielle. Soient $a < b$ deux nombres réels. Calcule $\displaystyle\int_a^b e^x dx$ en suivant la méthode du cours (avec les sommes de Darboux inférieures).

a) Calcule la somme de Darboux inférieure de e^x pour la subdivision régulière σ_n d'ordre n.

b) Calcule la limite $s(f)$ en utilisant les σ_n.

c) Explique pourquoi $s(f) = \displaystyle\int_a^b e^x dx$.

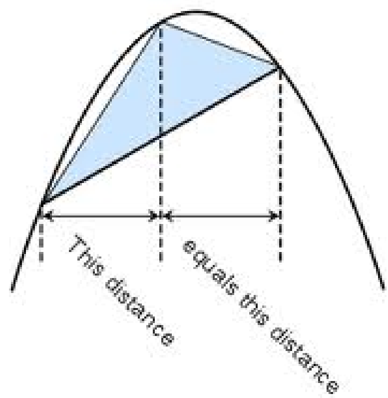
Exercice 7

Une fonction non continue et intégrable. Montre que la fonction réelle définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ est intégrable sur $[0, 2]$, mais non continue en 1.

Exercices théoriques

Exercice 8

Le secteur de parabole d'après Archimède. On considère la parabole d'équation $y = -x^2$ et le secteur compris entre la parabole et la droite passant par deux points $A = (a, -a^2)$ et $B = (b, -b^2)$. On suppose que $a < b$.



a) Calcule les coordonnées du point C de la parabole dont l'abscisse vaut $\dfrac{a+b}{2}$ et montre que l'aire du triangle ΔABC vaut $S = \dfrac{(b-a)^3}{8}$. Effectue un dessin de la situation.

b) On considère maintenant les points D et E construits comme C à partir de A et C et C et B (on coupe l'intervalle $[a, b]$ en deux, puis maintenant en quatre...). Montre que les aires des triangles ΔACD et ΔBCE sont égales et valent chacune $S/8$.

c) Montre que l'aire du secteur de parabole est plus grande que $S + \dfrac{S}{4} + \dfrac{S}{16} + \cdots + \dfrac{S}{4^n}$ pour tout n.

d) Montre que l'aire du secteur de parabole vaut $\dfrac{(b-a)^3}{6}$.