Série 29

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel V_1, la droite réelle. Détermine toutes les bases de V_1.

Exercice 2. Systèmes de générateurs. Détermine si les vecteurs suivants de V_n forment un système de générateurs.

a) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 3. Bases. Dans chacun des cas suivants, détermine si le vecteur nul est une combinaison linéaire *non triviale* (c'est-à-dire dont au moins un des coefficients est non-nul) des vecteurs donnés. Ces vecteurs forment-ils alors une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v_1}; \ldots; \overrightarrow{v_n})$ de V_n ?

a) $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}-10\\-1\end{pmatrix}$;

b) $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$;

c) $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$;

d) $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix}$;

e) $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$;

f) $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Indication : Pour **c)**, calcule les différences de deux des trois vecteurs.

Exercice 4. Démontre que les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ de V_3 sont coplanaires.

Exercice 5. Vrai ou faux ? Justifie tes réponses !

a) Une base de V_3 forme aussi une base de V_2.

b) Si $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base de V_2, alors pour tout vecteur $\vec{w}$ de V_2, les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment un système de générateurs.

c) Le vecteur nul ne fait jamais partie d'une base.

d) Soit $\vec{w}$ un vecteur de V_2. Il existe toujours une base de V_2 dont $\vec{w}$ fait partie.

e) Soit $\vec{w}$ un vecteur de V_2 non nul. Il existe toujours une base de V_2 dont $\vec{w}$ fait partie.

f) Soit $\vec{w}$ un vecteur de V_3. Il existe toujours une base de V_3 dont $\vec{w}$ fait partie.

g) Soit $\vec{w}$ un vecteur de V_3 non nul. Il existe toujours une base de V_3 dont $\vec{w}$ fait partie.

h) 3 vecteurs de V_3 deux à deux linéairement indépendants forment toujours un système de générateurs.

i) 4 vecteurs de V_3 deux à deux linéairement indépendants forment toujours un système de générateurs.