Cours Euler | 3ème année

Test 5 - Intégration | 1.05.24

Nom: ______________________ Prénom: ______________________

Le test dure 90 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire sur une feuille séparée.

Exercice 1. *(5 points)*

Soit $f : [1;2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

En utilisant une subdivision quelconque, calculer les valeurs de $s_\sigma(f)$ et $S_\sigma(f)$, puis $s(f)$ et $S(f)$. En conclure ensuite si f est intégrable ou non.

Exercice 2. *(7 points)*

a) Démontrer le théorème de la moyenne :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe alors un élément c de $[a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a).$$

b) Enoncer le théorème fondamental du calcul intégral.

Exercice 3. *(16 points)*

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$

b) $f(x) = (2x + 1)e^{-2x^2 - 2x}$

c) $f(x) = \dfrac{5x^2 + 6}{x^3 + 2x}$ (décomposition en éléments simples)

d) $f(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 + 6x + 18}$ (complétion de carré)

Exercice 4. *(7 points)*

On considère la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$.

Déterminer l'aire du domaine D borné limité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox.

Exercice 5. *(17 points)*

a) Calculer l'intégrale suivante en appliquant le changement de variables $x = \sqrt{\sin(t)}$:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,\mathrm{d}x$$

b) Calculer l'intégrale indéfinie suivante en utilisant l'intégration par parties :

$$\int e^{2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

c) Calculer l'intégrale suivante en utilisant l'intégration par parties :

$$\int_1^2 \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 6. *(6 points)*

Etudier la convergence des intégrales suivantes (on demande uniquement si l'intégrale est convergente ou divergente) :

a) $\displaystyle\int_2^{10} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x^3 - 1}{x^3 + 1}\,\mathrm{d}x$