EPFL - Printemps 2025	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 8	

Exercice 1.
Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{7})$. Montrez que $[K : \mathbb{Q}] = 4$.

Exercice 2.
Dans tous les cas suivants, calculez le degré de l'extension.

1. $[\mathbb{R}(e^{2i\pi/p}) : \mathbb{R}]$ pour p un nombre premier;
2. $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ pour α une racine de $t^{42} + t^{41} + \cdots + t^2 + t + 1$;
3. $[\mathbb{Q}(i, \sqrt[5]{13}) : \mathbb{Q}]$;
4. $[\mathbb{F}_3(\alpha) : \mathbb{F}_3]$ où α est une racine de $t^4 - t^3 - t^2 - t - [1]_3 \in \mathbb{F}_3[t]$ (disons que α vit dans le corps de décomposition de ce polynôme sur $\mathbb{F}_3$ pour fixer les idées) La réponse peut changer en fonction de la racine considérée.
5. $[\mathbb{Q}(\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ (on pourra calculer $(3 + \sqrt{5})^2$ pour commencer);
6. $[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}((\sqrt[6]{7})^2)]$;
7. $[\mathbb{F}_2(\alpha) : \mathbb{F}_2(\alpha^2)]$ où α est une racine de $t^3 + t + [1]_2 \in \mathbb{F}_2[t]$.

Exercice 3.

1. Considérons la situation suivante:
   - $\phi : K \to K'$ est un isomorphisme des corps,
   - $K \subseteq L$ et $K' \subseteq L'$ sont deux extensions de corps
   - $L = K(\alpha)$ et $L' = K'(\alpha')$ avec α et α' algébriques sur K et K' respectivement
   - si $\xi : K[x] \to K'[x]$ est l'isomorphisme induit par ϕ, alors $\xi(m_{\alpha,K}) = m_{\alpha',K'}$

   Démontrez qu'il existe une extension unique de ϕ à un isomorphisme $\eta : L \to L'$ tel que $\eta(\alpha) = \alpha'$
2. Démontrez que $K(x)[\sqrt{x+1}] \cong K(x)[\sqrt{x+2}]$
3. Démontrez que $K(x,y)[\sqrt{xy}] \cong K(x,y)[\sqrt{x(x+y)}]$

Exercice 4.
Soit $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ pour un entier $n > 2$. Démontrez que les corps de décomposition de $x^n - 2$ et de $x^{2n} - 3x^n + 2$ sur $\mathbb{Q}$ sont isomorphes entre eux, et aussi isomorphes à

$$\mathbb{Q}(\xi, \sqrt[n]{2}) \subseteq \mathbb{C}.$$

Exercice 5.
Soient $K \subset L \subset F$ des extensions de corps. Si $K \subset L$ et $L \subset F$ sont algébriques, montrez qu'il en est de même pour $K \subset F$.

Exercice 6.
Soit $\mathbb{Q}(x)$ le corps de fractions de l'anneau polynomial $\mathbb{Q}[x]$, et considérons

$$s := \frac{x^3 + 2}{x} \in \mathbb{Q}(x).$$

On a les extensions successives $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(s) \subset \mathbb{Q}(x)$.

1. Montrez que $\mathbb{Q}(x)$ est une extension algébrique de $\mathbb{Q}(s)$.
2. Calculez $[\mathbb{Q}(s) : \mathbb{Q}]$ et $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}(s)]$.

Exercice 7.
Soit $f = x^7 - y^5 \in \mathbb{C}[x, y]$. Le but de cet exercice est de démontrer que f est irréductible dans $\mathbb{C}[x, y]$. Soit $K = \mathbb{C}(y)$ et L le corps de décomposition de f sur K. Soit α une racine de f dans L, et $\beta = \frac{\alpha^3}{y^2}$.

1. Montrez que $[K(\beta) : K] = 7$. *Indication: Trouvez un polynôme sur K dont β est une racine.*
2. Montrez que $K(\beta) = K(\alpha)$.
3. Déduisez que f est irréductible dans $\mathbb{C}[x, y]$.