

**Exercice 1.** Dans les calculs qui suivent, les expressions indéterminées du type “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” ou “ $+\infty-\infty$ ” qui nécessitent un approfondissement (une amplification ou une simplification particulière) sont explicitées dans le premier item seulement. Ces évaluations sont effectuées implicitement dans le reste de l’exercice.

a) • **Domaine.** Pour que la fonction soit définie, il faut s’assurer que  $x^2 + 1 \geq 0$ , ce qui est toujours le cas. Donc  $D(f) = \mathbb{R}$ .

• **Asymptotes.** Il n’y a pas d’asymptote verticale. Pour les asymptotes obliques, on calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{-\infty}{-\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left( 2 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)}{x} = 3 \quad (\text{car } \sqrt{x^2} = |x| = -x \text{ si } x < 0)$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + 1 - \sqrt{x^2 + 1} = “+\infty - \infty” = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1 - (x^2 + 1)}{-x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{-1 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1 \end{aligned}$$

Donc  $y = 3x + 1$  est asymptote oblique à gauche. De même,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{+\infty - \infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( 2 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)}{x} = 1$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 - \sqrt{x^2 + 1} = “+\infty - \infty” \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1 \end{aligned}$$

Donc  $y = x + 1$  est asymptote oblique à droite.

• **Parité.** La fonction n’est ni paire, ni impaire. Par exemple,  $f(-1) = -1 - \sqrt{2}$  n’est ni égal à  $f(1) = 3 - \sqrt{2}$  (la fonction n’est donc pas paire), ni à  $-f(1) = -3 + \sqrt{2}$  (la fonction n’est pas impaire).

b) • **Domaine.** Comme  $4x^2 + 3 > 0$ , il suffit pour que la fonction soit définie que  $(4x + 1)(x + 4) \geq 0$ ; ce dernier produit décrit une parabole en “U” dont les zéros sont  $-4$  et  $-\frac{1}{4}$ . Donc  $D(g) = ]-\infty; -4] \cup [-\frac{1}{4}; +\infty[$ .

• **Asymptotes.** Il n’y a pas d’asymptote verticale. Pour les asymptotes obliques, on calcule,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3} - \sqrt{(4x + 1)(x + 4)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 3 - (4x + 1)(x + 4)}{x \left( \sqrt{4x^2 + 3} + \sqrt{(4x + 1)(x + 4)} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left( 17 + \frac{1}{x} \right)}{-x^2 \left( \sqrt{4 + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{4 + \frac{17}{x} + \frac{4}{x^2}} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{17}{4x} = 0 \end{aligned}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 3} - \sqrt{(4x + 1)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left( 17 + \frac{1}{x} \right)}{-x \left( \sqrt{4 + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{4 + \frac{17}{x} + \frac{4}{x^2}} \right)} = \frac{17}{4}$$

Donc  $y = \frac{17}{4}$  est asymptote horizontale à gauche. Les limites pour  $x \rightarrow +\infty$  de  $\frac{g(x)}{x}$ , puis de  $g(x)$ , s’obtiennent, au signe près, comme dans les calculs pour  $x \rightarrow -\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-17}{4x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 0 \cdot x) = \frac{-17}{4}$$

On obtient que  $y = -\frac{17}{4}$  est asymptote horizontale à droite.

• **Parité.** Le domaine de définition de la fonction n’est pas symétrique par rapport à l’origine :  $g$  ne peut donc ni être paire, ni être impaire.

- c) • **Domaine.** Les racines impaires (ainsi que les polynômes) sont définies sur  $\mathbb{R}$ , donc  $D(h) = \mathbb{R}$ .  
 • **Asymptotes.** Il n'y a pas d'asymptote verticale. Pour les asymptotes obliques, on calcule

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}}{x} = 1$$

puis on exploite l'identité  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$  :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (h(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x + 2 - x^3}{\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}^2 + x \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(-3 + \frac{2}{x})}{x^2 \left( \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}^2 + \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{3x} = 0 \end{aligned}$$

Donc  $y = x$  est asymptote oblique à gauche et à droite.

- **Parité.** On a  $h(-1) = \sqrt[3]{4}$  qui n'est ni égal à  $h(1) = 0$ , ni à  $-h(1) = 0$  : la fonction n'est ni paire, ni impaire.  
 d) • **Domaine.** On a  $D(i) = \mathbb{R}$ .  
 • **Asymptotes.** Il n'y a pas d'asymptote verticale. Pour les asymptotes obliques, on calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)} = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} i(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)} = -\frac{1}{2}$$

Donc  $y = -\frac{1}{2}$  est asymptote horizontale à gauche. Par contre,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

et il n'y a pas d'asymptote oblique à droite.

- **Parité.** La fonction ne peut ni être paire, ni impaire parce que l'asymptote oblique à gauche ne possède pas de symétrie à droite.

## Exercice 2.

- a) La parabole d'équation  $y = ax^2 + bx + c$  est en "U" car  $a > 0$ .  
 • Si  $\Delta \leq 0$ , la parabole est au-dessus ou tangente à  $Ox$ , et donc  $ax^2 + bx + c \geq 0$ . On a alors  $D(f) = \mathbb{R}$ .  
 • Si  $\Delta > 0$ , le polynôme  $ax^2 + bx + c$  possède deux zéros distincts  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ . Comme la parabole est en "U", on a  $D(f) = ]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ .  
 b) On calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} = -\sqrt{a}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + \sqrt{ax}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{ax} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left( b + \frac{c}{x} \right)}{-x \left( \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + \sqrt{a} \right)} = -\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

Donc  $y = -\sqrt{ax} - \frac{b}{2\sqrt{a}}$  est asymptote oblique à gauche. Les limite pour  $x \rightarrow +\infty$  de  $\frac{f(x)}{x}$  et de  $f(x)$  se calculent de même, à signe près ; on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \sqrt{a} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{ax}) = \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

Donc  $y = \sqrt{ax} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$  est asymptote oblique à droite. Comme

$$\left| \sqrt{ax} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right| = \begin{cases} -\sqrt{ax} - \frac{b}{2\sqrt{a}} & \text{si } x < \frac{-b}{2a}, \text{ et} \\ \sqrt{ax} + \frac{b}{2\sqrt{a}} & \text{si } x \geq \frac{-b}{2a} \end{cases}$$

les asymptotes obliques de  $f$  sont bien confondues à gauche et à droite avec la courbe  $y = \left| \sqrt{ax} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right|$ .

c) Commençons par trouver les éventuels points d'intersections du graphe de  $g$  avec le graphe de  $f$  : l'équation  $g(x) = f(x)$  s'écrit  $\left| \sqrt{ax} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right| = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ . Au risque de rajouter des solutions, élevons chaque côté de l'égalité au carré : on obtient

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = ax^2 + bx + c \quad \text{qui est équivalent à} \quad b^2 - 4ac = 0$$

En d'autres termes, les deux courbes ne s'intersectent que lorsque  $\Delta = 0$  (et on se convainc qu'il n'y a pas de "solution rajoutée"). Traitons les différents cas, en exploitant que le seul zéro de  $g$  est  $x = \frac{-b}{2a}$ .

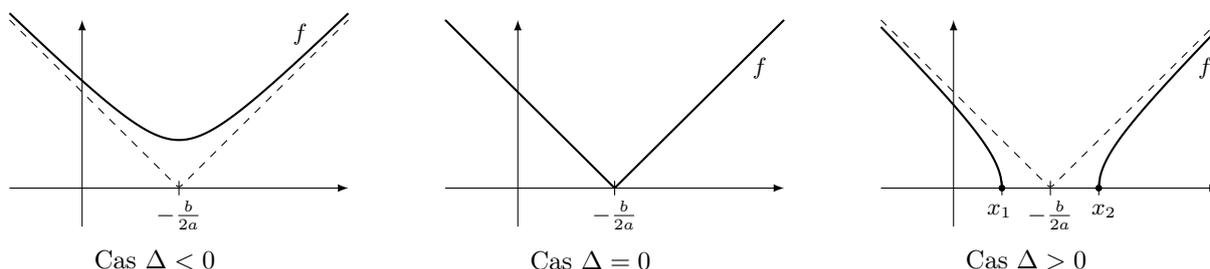
- Si  $\Delta < 0$ , le sommet de la parabole  $y = ax^2 + bx + c$  est en  $S = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$  est au-dessus du zéro de  $g$ . En prenant la racine de  $ax^2 + bx + c$ , on ne change pas la décroissance ou la croissance de la parabole. On obtient une branche d'hyperbole (voir le cours de 3<sup>e</sup> année sur les coniques).
- Si  $\Delta = 0$ , on a

$$f(x) = \sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \left| \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a}\right) \right| = \left| \sqrt{ax} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right|,$$

le graphe de  $f$  est confondu avec celui de  $g$ .

- Si  $\Delta > 0$ , le zéro de  $g$  est au milieu de "l'intervalle manquant"  $]x_1; x_2[$  à  $D(f)$ . En  $x_1$  et  $x_2$ , les zéros de  $f$ , le graphe de  $f$  sera donc en-dessous du graphe de  $g$ . On obtient dans ce cas deux demi-branches d'hyperbole (voir encore une fois le cours de 3<sup>e</sup> année sur les coniques).

Voici des esquisses du graphe de  $f$  (avec  $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ) dans les 3 cas traités ci-dessus.



### Exercice 3.

a) Pour  $x \neq 0$ , on a  $\frac{1}{x} - 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$ . Si  $x < 0$ , alors

$$1 - x = x \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right) \geq x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

et par le Théorème des deux gendarmes,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$ . De la même manière, si  $x > 0$ , alors

$$1 - x \leq x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$$

et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$ . Comme les limites à gauche et à droite sont les mêmes, on conclut  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$ .

b) Le même raisonnement qu'au point précédent s'applique à  $x \cdot \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor$  pour prouver

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor = 2$$

On peut donc écrire

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left( \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + x \cdot \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor = 1 + 2 = 3.$$

**Exercice 4.**

a) Comme dans la démonstration de la convergence des suites rationnelles, on a pour  $x \neq 0$ ,

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \frac{x^n}{x^m} \cdot \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_0 \frac{1}{x^n}}{b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \dots + b_0 \frac{1}{x^m}}$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$  (démontré dans une série précédente), et que la limite d'un produit est le produit des limites (si celles-ci existent), on a pour tout  $k \in \mathbb{R}$  et  $d \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k \frac{1}{x^d} = k \left( \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \right)^d = 0$$

De plus, comme la limite d'un quotient est le quotient des limites (si celles-ci existent), et que la limite d'une somme est la somme des limites (si celles-ci existent), on peut conclure

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-m}$$

Le résultat énoncé découle en distinguant les trois cas :  $n < m$ ,  $n = m$ , et  $n > m$ . Lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ , il faut tenir compte d'un changement possible de signe lorsque  $n > m$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m, \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m, \\ \operatorname{sgn} \left( \frac{a_n}{b_m} \right) \cdot (-1)^{n-m} \cdot \infty & \text{si } n > m, \end{cases}$$

b) Soit  $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$  une fonction rationnelle donnée comme en a). On rappelle que de l'égalité fondamentale de la division euclidienne de  $a(x)$  par  $b(x)$ , il suit  $f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}$  où  $q(x)$  est le quotient, et le degré du reste  $r(x)$  est strictement inférieur au le degré de  $b(x)$ . On avait aussi défini  $\delta(x) = \frac{r(x)}{b(x)}$ .

- Si  $f$  admet une asymptote oblique au "sens des fonctions rationnelles", alors  $f(x) = px + o + \delta(x)$  et

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (px + o) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \delta(x) = 0$$

par la partie a) de cet exercice. La droite  $y = px + o$  est donc bien une asymptote oblique au sens de la définition par les limites.

- Supposons maintenant que  $f$ , donnée par  $f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}$ , admet une asymptote oblique  $y = px + o$  au sens de la définition par les limites. Exploitions la proposition traitant du calcul des asymptotes obliques. Si  $p \neq 0$ , l'égalité  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = p$  implique par a) que le degré du numérateur  $a(x)$  est nécessairement égal au degré de  $x \cdot b(x)$  (c'est-à-dire  $\deg(a) = \deg(b) + 1$ ), et que  $\frac{a_n}{b_m} = p$ ; si  $p = 0$ , alors  $\deg(a) \leq \deg(b)$ . En d'autres termes,  $q(x) = px + k$  (avec  $p$  éventuellement nul). Comme la limite d'une somme est la somme des limites (si celles-ci existent), l'égalité  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - px) = o$  implique  $k = o$ , c'est-à-dire  $q(x) = px + o$ .

**Exercice 5.**

- a) • Dans la démonstration de  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$  du cours, nous avons vu (en comparant des aires de triangles) que si  $t \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ , alors en particulier,  $\cos(t) \leq \frac{\sin(t)}{t}$ . De même, dans le cercle trigonométrique, on observe que la longueur d'arc  $t \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  est plus grande que la longueur de sa projection  $\sin(t)$  sur l'axe vertical :  $\sin(t) \leq t$ , d'où l'on tire  $\frac{\sin(t)}{t} \leq 1$  en divisant par  $t > 0$ .
- Des considérations similaires dans le cercle trigonométrique, en prenant garde au signe de  $t \in ]-\frac{\pi}{2}; 0[$  et au sens des inégalités, donnent aussi  $\cos(t) \leq \frac{\sin(t)}{t}$ . Dans ce cas,  $\sin(t) \geq t$  (car  $t < 0$ ) donne  $\frac{\sin(t)}{t} \leq 1$  après division par  $t$ .

Dans les deux cas, on a bien  $\cos(t) \leq \frac{\sin(t)}{t} \leq 1$ .

b) • Si  $t \in ]-\frac{\pi}{2}; 0[$ , des inégalités de a) on déduit  $\frac{1}{t} \cdot (\cos(t) - 1) \geq \frac{1}{t} \cdot \left( \frac{\sin(t)}{t} - 1 \right) \geq \frac{1}{t} \cdot (1 - 1) = 0$ .

- Si  $t \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ , on obtient  $\frac{1}{t} \cdot (\cos(t) - 1) \leq \frac{1}{t} \cdot \left( \frac{\sin(t)}{t} - 1 \right) \leq \frac{1}{t} \cdot (1 - 1) = 0$ .

c) Dans les deux cas précédents, on amplifie l'expression de gauche par  $\cos(t) + 1$  pour pouvoir conclure.

- En effet, si  $t \in ]-\frac{\pi}{2}; 0[$ , alors

$$\frac{1}{t} \cdot \left( \frac{-\sin^2(t)}{\cos(t)+1} \right) \geq \frac{1}{t} \cdot \left( \frac{\sin(t)}{t} - 1 \right) \geq 0$$

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} \cdot \left( \frac{-\sin^2(t)}{1+\cos(t)} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^-} -\frac{\sin(t)}{t} \cdot \left( \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)} \right) = -1 \cdot \frac{0}{1} = 0$ , on obtient  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} \cdot \left( \frac{\sin(t)}{t} - 1 \right) = 0$  par les 2 gendarmes.

- Si  $t \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ , les inégalités

$$\frac{1}{t} \cdot \left( \frac{-\sin^2(t)}{\cos(t)+1} \right) \leq \frac{1}{t} \cdot \left( \frac{\sin(t)}{t} - 1 \right) \leq 0$$

permettent de conclure comme avant  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \cdot \left( \frac{\sin(t)}{t} - 1 \right) = 0$ .

On a finalement montré  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \left( \frac{\sin(t)}{t} - 1 \right) = 0$ .

### Exercice 6.

- a) • **Domaine.** Pour que la fonction soit définie, il faut que le dénominateur soit non nul :  $x \neq 0$ , donc  $D(a) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

- **Limites.** En  $x = 0$ , on a  $\lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{\sin(x)}{x} = 0 + 1 = 1$ . La fonction possède donc un “trou” en  $(0; 1)$ .

- **Asymptotes.** Par le calcul précédent, il n’y a pas d’asymptote verticale en  $x = 0$ . Pour l’asymptote oblique, on calcule

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + \frac{\sin(x)}{x^2} = 1 + 0 = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

par le Théorème des deux gendarmes pour les fonctions. Donc  $y = x$  est l’asymptote oblique (à gauche et à droite).

- **Parité.** Comme l’asymptote oblique n’est pas symétrique par rapport à  $Oy$ , la fonction n’est pas paire. De plus,  $a(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}$  et  $-a(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}$ , la fonction n’est pas impaire non plus.

Alternativement, la somme d’une fonction impaire (non nulle) et d’une fonction paire (non nulle) — car quotient de deux fonctions impaires — n’est ni paire ni impaire.

- b) • **Domaine.** La fonction est définie partout, donc  $D(b) = \mathbb{R}$ .

- **Limites.** Il n’y a pas de valeur interdite, donc pas de trou.

- **Asymptotes.** Il n’y a pas d’asymptote verticale. Pour l’asymptote oblique, on calcule

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{b(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + \frac{\sin(x)}{x} = 1 + 0 = 1$$

par le Théorème des deux gendarmes. Par contre, les limites vers  $-\infty$  ou  $+\infty$  de  $b(x) - x = \sin(x)$  n’existent pas (par exemple, les suites données par  $x_n = \frac{\pi}{2} + n2\pi$  et  $y_n = -\frac{\pi}{2} + n2\pi$  tendent toutes deux vers  $+\infty$ , mais leurs images par  $b$  tendent respectivement vers 1 et  $-1$ ).

La fonction ne possède donc pas d’asymptote oblique (ni à gauche, ni à droite).

- **Parité.** La somme de deux fonctions impaire est impaire (on a bien  $b(-x) = -b(x)$ ).

- c) • **Domaine.** Pour éviter une “division par 0”,  $D(c) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

- **Limites.** Comme  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , en  $x = 0$ , on a  $\lim_{x \rightarrow 0} 10x \sin(\frac{1}{x}) = 0$  par le Théorème des deux gendarmes pour les fonctions. La fonction possède donc un “trou” en  $(0; 0)$ .

- **Asymptotes.** Pas d’asymptote verticale pour cette fonction par le calcul précédent. Pour l’asymptote oblique, on calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(au besoin, on peut se convaincre de ce résultat par le Théorème des deux gendarmes, puisque pour  $t \in ]-\frac{\pi}{2}; 0[$ , on a  $t \leq \sin(t) \leq -t$ , c’est-à-dire pour  $x \in ]-\infty; -\frac{2}{\pi}[$ , on a  $\frac{1}{x} \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq -\frac{1}{x}$ , et donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ ). De plus, par le changement de variable  $t = \frac{1}{x}$ , on obtient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} c(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 10 \cdot \frac{\sin(t)}{t} = 10$$

La droite  $y = 10$  est donc asymptote horizontale à gauche pour  $c$ . Les calculs pour  $x \rightarrow +\infty$  sont similaires, et on trouve que  $y = 10$  est aussi asymptote horizontale à droite.

- **Parité.** Comme  $c(-x) = c(x)$ , la fonction est paire.
- d) • **Domaine.** Pour éviter une “division par 0”,  $D(d) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- **Limites.** En raisonnant comme en **c**), on obtient  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ , et cette fonction possède aussi un “trou” en  $(0; 0)$ .
- **Asymptotes.** Pas d’asymptote verticale pour cette fonction par le calcul précédent. Pour l’asymptote oblique,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{d(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

par le même changement de variable  $t = \frac{1}{x}$  qu’en **c**). De même,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} d(x) - x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \left( \frac{\sin(t)}{t} - 1 \right) = 0$$

par l’exercice précédent, et  $y = x$  est asymptote oblique pour  $d$ .

- **Parité.** Comme  $d(-x) = -d(x)$ , la fonction est impaire.