

**Exercice 1.**

- a) On considère d'abord le cas  $a > 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , et  $\delta = \varepsilon \cdot 2\sqrt{a}$ . Alors, si  $x \in \mathbb{R}_+$  est tel que  $0 < x - a < \delta$  (et en particulier  $a < x$ , donc  $\sqrt{a} < \sqrt{x}$ ), on a

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{x - a}{2\sqrt{a}} < \frac{\delta}{2\sqrt{a}} = \frac{\varepsilon \cdot 2\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} = \varepsilon,$$

qui est bien l'inégalité voulue pour démontrer  $\lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ .

Pour le cas  $a = 0$ , on considère bien sûr  $\varepsilon > 0$ ; mais  $\delta$  choisi ci-dessus ne serait pas défini (on aurait  $\delta = 0$ ). Dans ce cas, on peut choisir directement  $\delta = \varepsilon^2$ . En effet, si  $x \in \mathbb{R}_+$  est tel que  $0 < x - a < \delta$ , on a  $0 < x < \varepsilon^2$ , et donc  $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \sqrt{x} < \varepsilon$ , comme voulu.

- b) La démonstration est similaire au cas  $a > 0$  ci-dessus (il faut remplacer  $x - a$  par  $a - x$ , et on a  $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \sqrt{a} - \sqrt{x}$ ).
- c) Par a) et b), et le fait que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = b \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = b$$

on a pour tout  $a \in \mathbb{R}_+^*$  que  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ . La proposition du cours sur la limite d'une composition de fonctions donne alors le résultat énoncé (avec  $g(x) = \sqrt{x}$  et  $b = \sqrt{a}$ ).

- d) Un des premiers exercices sur les suites demande de démontrer que si une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$  (si toutes les racines sont définies). Par la proposition sur l'équivalence de la définition d'une limite de fonction et la convergence de suites, les résultats demandés sont redémontrés.

**Exercice 2.** Comme  $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ , on a  $-x \leq x \sin(1/x) \leq x$  si  $x > 0$ , et  $x \leq x \sin(1/x) \leq -x$  si  $x < 0$ . Comme les fonctions  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto -x$  tendent vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0 (par la droite ou la gauche), on conclut par le théorème des deux gendarmes que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin(1/x) = 0$ , et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin(1/x) = 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$ .

**Exercice 3.**

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + 1} = 1 \cdot 1 = 1$ .
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos(x) = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 2$ .

**Exercice 4.**

- a) Le polygone peut se partager en  $n$  triangles isocèles dont les deux côté égaux mesurent 1 et l'angle au centre vaut  $2\pi/n$ . Par le théorème de l'aire, chacun de ces triangle a pour aire  $\frac{1}{2} \sin(2\pi/n)$  et donc l'aire du polygone vaut  $\frac{n}{2} \sin(2\pi/n)$ .
- b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} \sin(2\pi/n) = \pi \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n} = \pi \cdot 1 = \pi$ , qui est bien l'aire d'un disque de rayon 1.

**Exercice 5.**

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin(x)}{x + \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{1 - \sin(x)/x}{1 + \sin(x)/x} = 1$  (en utilisant que pour  $x > 0$ , on a  $-1/x \leq \sin(x)/x \leq 1/x$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)/x = 0$  par le théorème des deux gendarmes pour les fonctions).
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^2(x) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} - \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)^2 = -1$ .

**Exercice 6.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{\sqrt{1 - \cos(x)}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{\sqrt{1 - \cos(x)}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \cos(x)}}{\sqrt{1 + \cos(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \cos(x)}}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \cos(x)}}{|\sin(x)|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \cos(x)}}{\frac{|\sin(x)|}{|x|}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

**Exercice 7.**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}{x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1/x + \sqrt{1/x^3}}}{1 + 1/x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1/x + \sqrt{1/x^3}}}{1 + 1/x}} = \sqrt{1} \cdot \sqrt{1} = 1.\end{aligned}$$

**Exercice 8.** Pour que  $f$  admette une asymptote verticale  $x = -3$ , il faut que  $d = 3$ . Pour que  $f$  admette une asymptote oblique d'équation  $y = -2x + 1$ , nous pouvons procéder par division euclidienne ou avec le calcul de limites :

- Par division euclidienne : il faut que la division de  $ax^2 + bx + c$  par  $x + 3$  ait un quotient de  $q(x) = -2x + 1$ . On calcule (par Horner ?)  $q(x) = ax + (b - 3a)$  et le reste est  $r(x) = c - 3b + 9a$ . On veut  $-2x + 1 = ax + (b - 3a)$ , dont on déduit  $a = -2$  et  $b + 6 = 1$ , soit  $b = -5$ .

- Par les limites : la pente de  $-2$  de l'asymptote oblique se calcule avec  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ , donc  $a = -2$ . De même, l'ordonnée à l'origine de 1 se calcule avec  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(b + 6)x + c}{x + 3} = b + 6$ , donc  $b = -5$ .

Finalement, il reste à trouver  $c$  que l'on déduit du fait que le graphe de  $f$  passe par le point  $(2; -2)$  et donc que  $f(2) = -2$ ; autrement dit  $\frac{4(-2) + 2(-5) + c}{2 + 3} = -2$ , ainsi  $c = 8$ .

**Exercice 9.** Pour les asymptotes verticales il faut que  $d = 2$  et  $e = -1$ , ainsi on récrit  $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x + 2)(x - 1)}$ . De la forme de  $f(x)$  et du fait qu'elle admet une asymptote oblique d'équation  $3x - 7$ , on en déduit immédiatement  $a = 3$  et  $b = -7$  (en effet, lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ , la partie rationnelle  $\frac{c}{(x + d)(x + d)}$  de  $f(x)$  tendra vers 0). Finalement, on utilise le fait que le graphe de  $f$  passe par le point  $(-5; 20)$ , autrement dit que  $f(-5) = 20$ , pour obtenir la valeur de  $c = 756$ .