

Série 28

Exercice 1. Dans le cours, les vecteurs ont été définis dans $\mathbb{R}^n$, mais nous les avons représentés dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire pour $n = 2$ ou $n = 3$). Comment se réalisent les vecteurs dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire pour $n = 1$) ? Définis cette notion et explique comment on caractérise un vecteur sur la droite réelle $\mathbb{R}$.

Exercice 2. On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'origine $O = (0; 0)$ et les points $A = (1; 1)$ et $B = (2; 1)$.

- Reporte sur du papier quadrillé les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{BA}$.
- Construis ensuite les vecteurs $2 \cdot \overrightarrow{OA} - 4 \cdot \overrightarrow{OB}$ et $2 \cdot \overrightarrow{OA} - 4 \cdot \overrightarrow{BA}$, puis la somme de ces deux vecteurs.
- Indique en notation colonne les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, puis calcule les autres vecteurs que tu as construits ci-dessus.

Exercice 3. Donne des exemples de :

- flèches différentes qui représentent le même vecteur ;
- flèches qui représentent des vecteurs différents de même direction et de même longueur ;
- des vecteurs de même longueur mais de directions différentes ;
- vecteurs différents de même direction et de même sens.

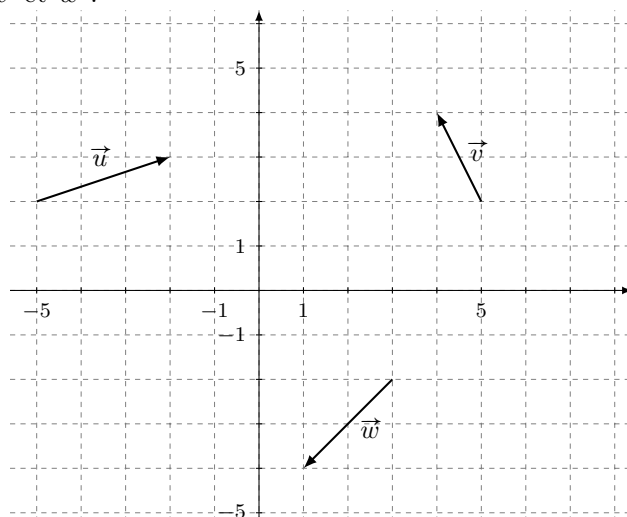
Exercice 4. En utilisant la relation de Chasles, démontre que la somme de vecteurs est commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Exercice 5. Vrai ou faux ? Justifie tes réponses !

- Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si chacun d'eux est un multiple de l'autre.
- Trois vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si deux d'entre eux sont colinéaires.
- Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants si l'un d'entre eux est nul.
- Trois vecteurs de V_3 sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'entre eux se trouve dans un même plan que les deux autres.
- Il existe deux vecteurs linéairement indépendants dans V_1 .
- Il existe trois vecteurs linéairement indépendants dans V_2 .
- Il existe trois vecteurs linéairement indépendants dans V_3 .

Exercice 6. Considérons dans V_2 les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

- Construis $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
- Calcule cette somme en notation colonne.
- Décris toutes les flèches équipollentes à $\vec{u}$.
- Détermine si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.
- Détermine si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

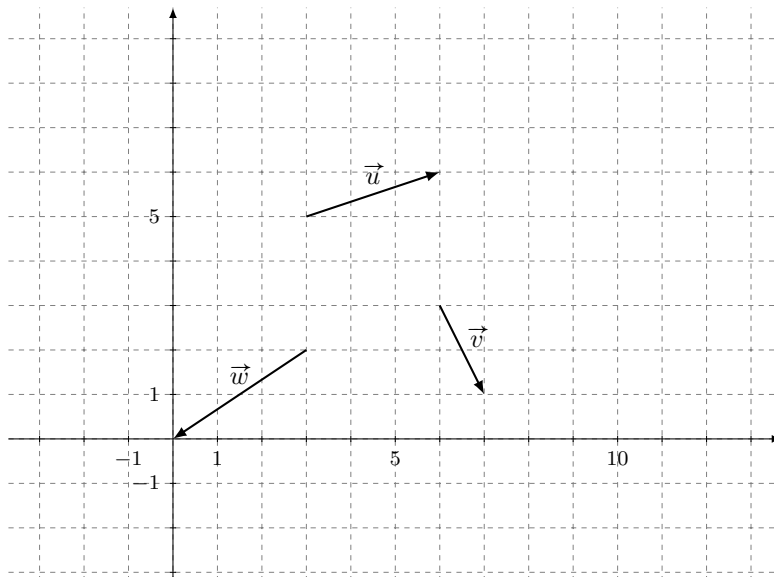


Exercice 7. En utilisant la définition de l'action de $\mathbb{R}$ sur V_2 (et sans utiliser la notation des vecteurs en colonne), démontre dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $\lambda > 0$ que l'action de $\mathbb{R}$ est distributive par rapport à la somme de vecteurs de V_2 : $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$. Tu pourras t'aider du Théorème de Thalès.

Exercice 8. Reporte dans $\mathbb{R}^2$ les points $A = (4; 2)$, $B = (0; 8)$, $C = (-6; 4)$ (dessine l'axe Ox allant de -7 à 7 , et l'axe Oy allant de -3 à 9 avec une unité valant 5 mm).

Construis le point D tel que $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$. Construis ensuite $\overrightarrow{OA} + 1/2 \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OA} + 1/2 \cdot \overrightarrow{AB} + 1/2 \cdot \overrightarrow{BC}$. Détermine le centre du carré $ABCD$.

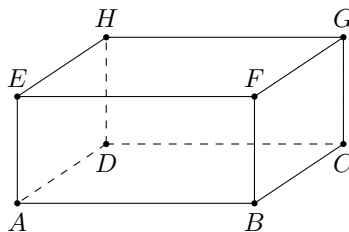
Exercice 9. On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ci-dessous. Construis $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{u} - \vec{w}$ et $2\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$; ces trois vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?



Exercice 10. Barycentre d'un triangle équilatéral. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le triangle dont les sommets sont les points $A = (4; 0; 0)$, $B = (0; 4; 0)$ et $C = (0; 0; 4)$. On appelle O l'origine.

- Dessine une esquisse de ce triangle dans l'espace.
- Calcule les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
- Calcule le point milieu du segment $[AB]$ obtenu vectoriellement comme $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 1/2 \cdot \overrightarrow{AB}$.
- Calcule le vecteur $\overrightarrow{CM}$.
- Calcule et construis sur ton esquisse le barycentre G du triangle $\triangle ABC$. On l'obtient vectoriellement comme $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + 2/3 \cdot \overrightarrow{CM}$. Quelles sont les coordonnées de G ?

Exercice 11. On considère dans $\mathbb{R}^3$ un parallélépipède :



Exprime de la manière la plus simple possible les vecteurs $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FC}$ ainsi que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{GC}$.

Exercice 12. L'hexagone régulier. On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ les points $O = (0; 0)$ et $A = (2; 0)$.

- a) Donne l'expression des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de longueur 2 qui sont supportés par des droites faisant un angle de $\pi/3$ avec l'axe Ox . On choisira $\vec{u}$ de sorte que ses deux composantes soient positives, et $\vec{v}$ avec sa deuxième composante positive.
- b) Calcule les coordonnées de quatre points B, C, D et E tels que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{u}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \vec{v}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} - \vec{u}$.
- c) Représente sur un dessin l'hexagone régulier $OABCDE$ ainsi obtenu.

Exercice 13. On dit que deux flèches du plan sont équivalentes et on note $\overrightarrow{AB} \simeq \overrightarrow{CD}$ si elles ont même direction et même longueur.

- a) Montre que cela définit une relation d'équivalence sur les flèches.
- b) Peut-on définir une somme sur les classes d'équivalence de flèches ainsi obtenues (comme nous l'avons fait pour les classes d'équipollence) ?

Exercice 14. Les polynômes comme espace vectoriel. Considérons $\mathbb{R}[x]$, l'anneau des polynômes réels en une variable x .

- a) Pourquoi $\mathbb{R}[x]$ est-il un groupe commutatif pour l'addition de polynômes ?
- b) On définit une action de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}[x]$ en posant $\lambda \cdot (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \cdots + \lambda a_nx^n$. Pourquoi $\mathbb{R}[x]$ est-il un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ? Explique en particulier pourquoi ce produit est distributif par rapport à l'addition.
- c) Montre que les polynômes $1, x, x^2$ sont linéairement indépendants.
- d) Montre que les polynômes $1 - x, 1 + x, x$ sont linéairement dépendants.