

Série 31

Pour le 20 août 2025

Exercice 1

Inversion de cercles tangents.

Décrire l'image par l'inversion de pôle C et de cercle d'inversion Γ de deux cercles tangents dans chacun des cas suivants.

Illustrer le propos d'un dessin et expliquer les raisons du résultat dans chacun des cas suivants.

- Les deux cercles passent par le pôle d'inversion et sont tous deux tangents au cercle d'inversion.
- Les deux cercles passent tous deux par C , et leurs diamètres sont supérieurs au rayon de Γ .
- Les deux cercles passent tous deux par C , et leurs diamètres sont inférieurs au rayon de Γ .
- L'un des cercles passe par C , l'autre non. Tous deux sont intérieurs au cercle d'inversion.
- Les deux cercles sont extérieurs au cercle d'inversion.

Exercice 2

Angles.

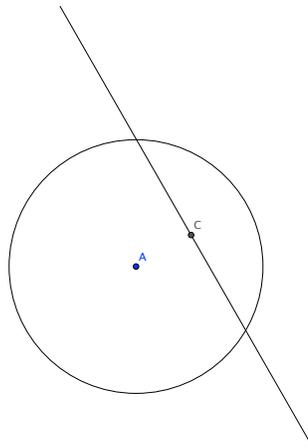
On considère un cercle de centre $(0;0)$ et de rayon 1 et une courbe $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Calculer dans chacun des cas suivants l'angle formé par le cercle et la courbe c en leur(s) point(s) d'intersection.

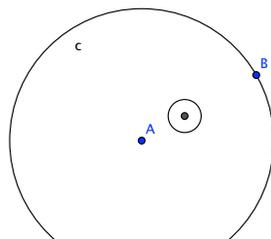
- $c(t) = 2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;
- $c(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;
- $c(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;
- $c(t) = 1/2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;
- $c(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;

Exercice 3**Inversions.**

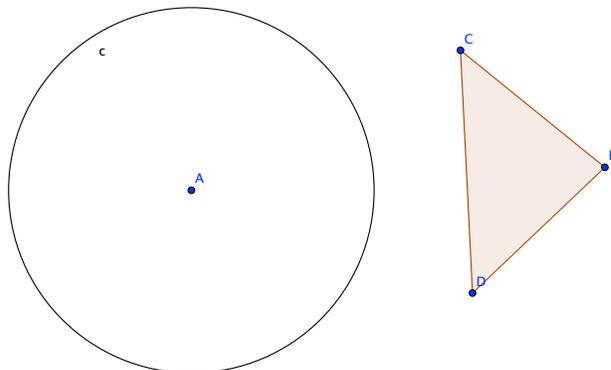
- a) Construire à la règle et au compas l'inverse de la droite donnée par rapport au cercle donné.
Écrire une marche à suivre ($\|AC\|$ est un demi-rayon).



- b) Construire à la règle et au compas l'inverse du petit cercle par rapport au grand cercle donné.
Écrire une marche à suivre (le diamètre du petit-cercle est un quart de rayon).



- c) Construire à la règle et au compas l'inverse du triangle par rapport au cercle donné.
Écrire une marche à suivre. Suggestion : utiliser des points des droites supportant les côtés du triangle dont les inverses sont facile à construire !



Exercice 4

Forme analytique des inversions.

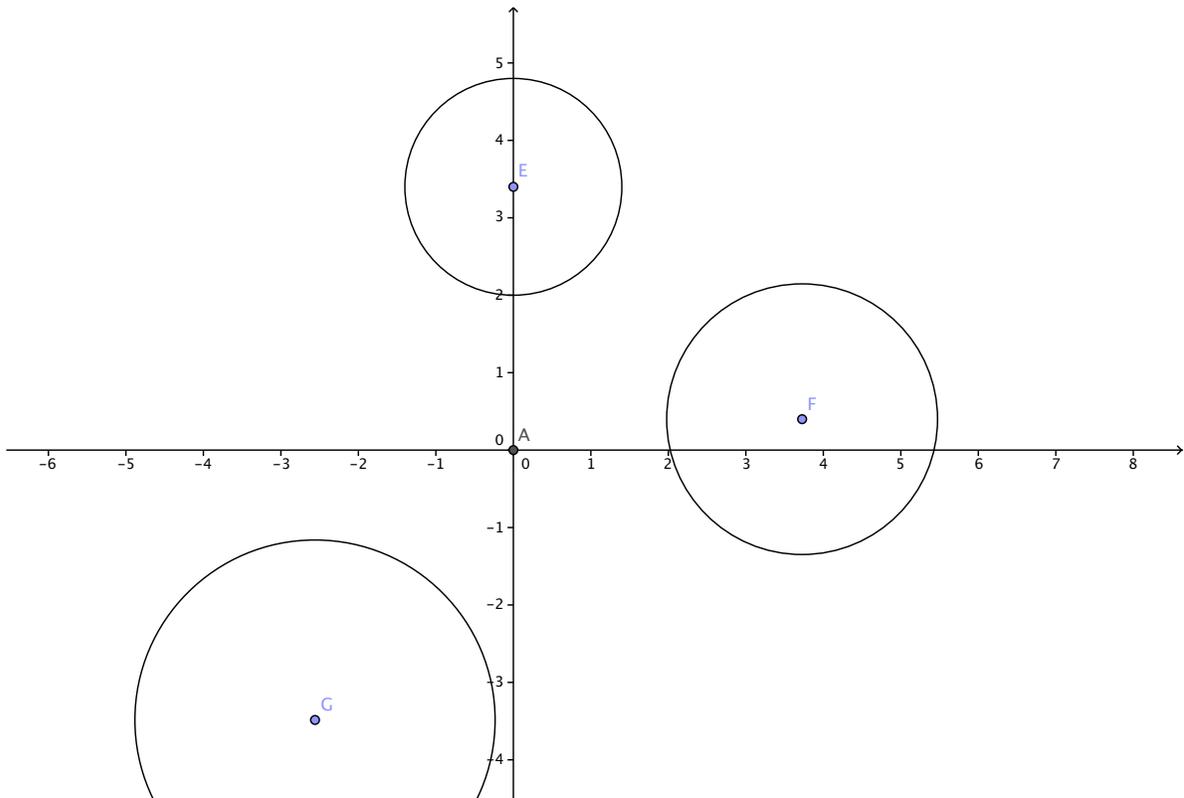
On considère l'inversion ι par rapport au cercle de centre $O = (0; 0)$ et de rayon r .

- Soit $P = (x; y)$ un point du plan. Quels sont les coordonnées de $\iota(P)$?
- Donner une interprétation géométrique (en termes d'inversion bien sûr !) à l'application définie sur \mathbb{C}^* par $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.
- On considère la composition $h = \iota' \circ \iota$ de deux inversions, où ι' est l'inversion de pôle O et de cercle d'inversion de rayon R . Calculer $h(x, y)$ analytiquement.
- Décrire h géométriquement.
- Déduire de cet exercice que les homothéties préservent les angles !

Exercice 5**Problème d'Appolonius.**

Résoudre le problème d'Appolonius dans la situation suivante.

Suggestion : utiliser un cercle d'inversion qui coupe les cercles à inverser de sorte que leurs images soit plus facile à construire.



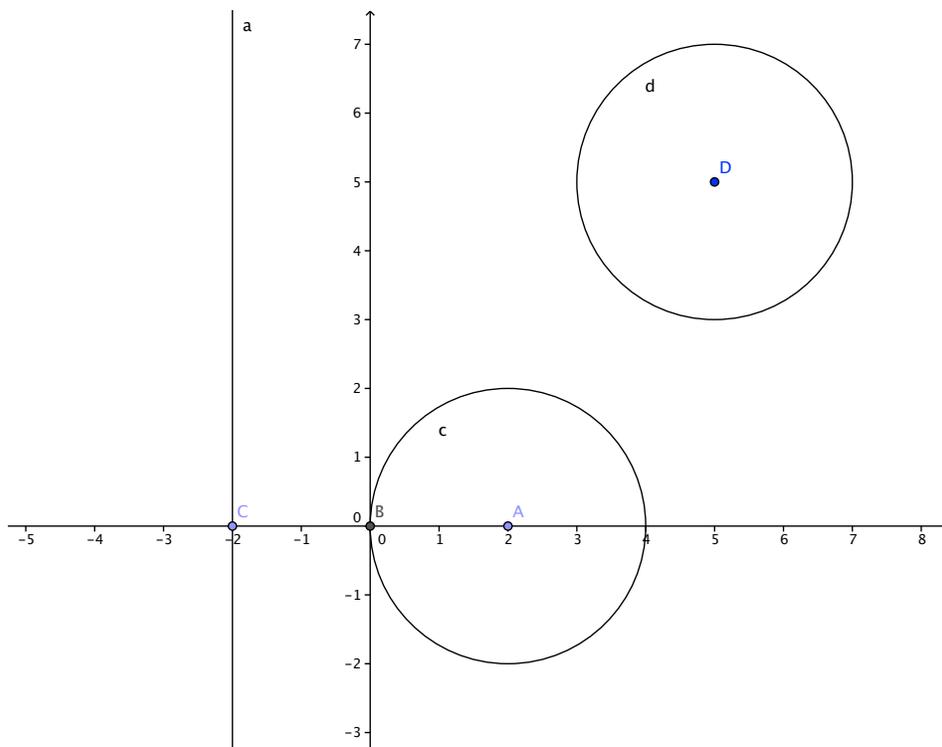
Exercice 6**Vrai ou faux ?**

Justifier brièvement tes réponses, avec un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- Soit Γ un cercle. Un cercle dont le centre se trouve sur Γ ne coupe jamais Γ en un angle droit.
- Deux cercles de même rayon ne peuvent pas se couper en un angle de $\pi/3$.
- L'inversion du cercle inscrit d'un triangle est un cercle circonscrit au triangle image.
- Les inverses de deux cercles concentriques sont deux cercles concentriques.
- Les inverses de deux cercles concentriques ne sont jamais deux cercles concentriques.

Exercice 7

Résous le problème d'Apollonius dans le cas suivant (on cherche donc un cercle tangent simultanément à la droite a et aux cercles c et d :



Exercice 8

Existe-t-il une situation pour laquelle le problème d'Apollonius n'a pas de solution? Si oui, laquelle?

Exercices théoriques**Exercice 9**

La projection stéréographique. On pose une sphère S^2 sur un plan horizontal \mathcal{H} , si bien qu'elle lui est tangente en son pôle sud S . La projection stéréographique p est la projection centrale de la sphère sur le plan à partir de son pôle nord N . Ainsi pour un point X de la sphère (avec $X \neq N$) l'image $p(X)$ est le point d'intersection de la droite NX avec le plan horizontal.

- a) Dessine une illustration soignée de la situation.
- b) Montre que p définit une bijection $p : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathcal{H}$ de la sphère privée de son pôle nord avec le plan \mathcal{H} .
- c) Définis ce qu'est une inversion dans l'espace de pôle N et de sphère d'inversion Σ .
- d) Dans le cas où le pôle d'inversion est N et Σ est la sphère d'inversion de centre N et de rayon $[NS]$, montre que la restriction de l'inversion à la sphère S^2 est précisément la projection stéréographique.
- e) Montre que la projection stéréographique transforme les cercles de S^2 passant par N en des droites.
- f) Montre que la projection stéréographique transforme les cercles de S^2 ne passant pas par N en des cercles.