

Série 30

Pour le 4 juin 2025

Exercice 1

Continuité. Les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont-elles continues? Dessine une esquisse de la fonction dans chaque cas.

a) $f(t) = (t, t^2)$;

b) $f(t) = (|t|, t^3)$;

c) $f(t) = \left(\left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor, \cos t \right)$;

d) et enfin la fonction réelle $f : [0; 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(t) = \left(\left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor, \cos t, \sin t \right)$.

Exercice 2

Courbes paramétrées. Donne une formule en fonction du temps t qui décrit le mouvement d'un point se déplaçant

a) sur une droite passant par le point $(1; 2; 3)$ en $t = 0$ et de vecteur directeur $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$;

b) sur une "hélice conique" tournant autour de l'axe Oz sur un cône de révolution dont la droite génératrice fait un angle de $\pi/4$ avec la verticale et se trouvant à hauteur t au temps t ;

Exercice 3

Les mouvements. Les formules suivantes définissent-elles des mouvements dans \mathbb{R}^3 ? On travaille avec des vecteurs \vec{x} dans l'espace $\mathbb{V}(\mathbb{R}^3)$ et un paramètre $t \in [0, 1]$.

a) $g_t(\vec{x}) = \vec{x} + (1 + t)\vec{x}$.

b) $g_t(\vec{x}) = \vec{x}$.

c) $g_t(\vec{x}) = \vec{x} - t\vec{x}$.

d) $g_t(\vec{x}) = \vec{x} + t\vec{x}$.

e) $g_t(\vec{x}) = (I_3 + t(A - I_3))\vec{x}$, où A est une matrice de rotation.

Exercice 4

- a) Ecris la formule matricielle d'un mouvement qui emmène un vecteur \vec{x} du plan sur le vecteur $-\vec{x}$ par des rotations.
- b) Décris en français (sans nécessairement donner la formule mathématique) un mouvement qui échange deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} distincts et de même norme et emmène un troisième vecteur \vec{x} orthogonal à chacun d'eux sur le vecteur $-\vec{x}$.

Exercice 5

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- a) Si une seule des fonctions de coordonnées d'une fonction réelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ n'est pas continue, alors f n'est pas continue.
- b) Il existe un mouvement g_t dans le plan \mathbb{R}^2 tel que $g_{1/2}$ est l'identité, mais g_1 est une rotation.
- c) Il existe un mouvement g_t dans le plan \mathbb{R}^2 tel que $g_{1/2}$ est une symétrie axiale, mais g_1 est l'identité.
- d) Il existe un mouvement g_t dans le plan \mathbb{R}^2 tel que g_t est une translation différente de l'identité, mais g_1 est l'identité.
- e) Toutes les applications bilinéaires $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont de la forme $f(x, y) = axy + b$.
- f) Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace orthogonaux. Alors la norme de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est toujours plus grande ou égale à la norme du vecteur $\rho_\alpha \vec{u} \wedge \rho_\beta(\vec{v})$, où ρ_α et ρ_β sont des rotations de centre $(0; 0; 0)$ et d'angle respectivement α et β .
- g) Le produit vectoriel est associatif.
- h) Le produit vectoriel n'est pas associatif, mais néanmoins $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}$.
- i) Le produit vectoriel n'est pas associatif, mais néanmoins $\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{u}) = (\vec{v} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u}$.

Exercice 6

On considère une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$.

Montre que l'application $\alpha : \mathbb{V}(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{V}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\alpha(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}^t A \vec{v}$ est bilinéaire.

Existe-t-il une matrice A pour laquelle cette application donne le produit scalaire ?

Rappel : \vec{u}^t désigne le vecteur \vec{u} transposé, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^t = (a \ b)$.

Exercice 7

Soit Γ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$. Détermine les équations des tangentes au cercle passant par le point $P = (9; 4)$.

Exercices théoriques**Exercice 8**

Le produit scalaire. On note $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ le produit scalaire des vecteurs \vec{x} et \vec{y} .

- Montre que le produit scalaire est bilinéaire, c'est-à-dire que si l'on fixe \vec{x} , l'application $\langle \vec{x}, - \rangle : \mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire et si l'on fixe \vec{y} , l'application $\langle -, \vec{y} \rangle : \mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi linéaire.
- Montre que le produit scalaire est invariant par rotation, c'est-à-dire que si ρ est une rotation de centre O , alors $\langle \rho(\vec{x}), \rho(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ pour tous les vecteurs \vec{x}, \vec{y} .
- Le produit scalaire est-il la seule application bilinéaire $\mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$?

Exercice 9

Démontre en suivants les pas proposés que

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \cdot \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \cdot \vec{u}$$

pour des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathbb{V}(\mathbb{R}^3)$.

- Montre que la formule est vraie lorsque $\vec{u} = \lambda \vec{e}_1$ et $\vec{v} = \mu \vec{e}_2$.
- Montre qu'alors la formule est aussi vraie lorsque \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux (utilise l'invariance par mouvement de sorte à effectuer une rotation qui envoie $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sur un multiple de \vec{e}_3).
- Utilise la bilinéarité du produit vectoriel pour montrer qu'alors la formule est vraie en général (décompose \vec{v} en une somme de deux vecteurs, dont l'un est orthogonal à \vec{u}).

Exercice 10

Vrai ou faux ? Justifie tes réponses, en construisant un contre-exemple lorsque c'est possible.

- a) L'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est toujours celle d'un cercle.
- b) La puissance d'un point par rapport à un cercle est négative si et seulement si le point est à l'intérieur du cercle.
- c) La polaire relativement à un cercle d'un point du cercle est la droite passant par ce point et le centre du cercle.
- d) La polaire du centre du cercle relativement à ce cercle est l'ensemble vide.

Exercice 11

Le pôle. Soit Γ un cercle de centre C et p une droite ne passant pas par le centre.

- a) Montre qu'il existe un unique point P dont la polaire est p . Ce point P s'appelle le pôle.
- b) Montre que la polaire du point d'intersection de deux droites est la droite qui passe par leurs pôles.
- c) Montre que le pôle d'une droite passant par deux points est l'intersection des polaires de ces deux points.
- d) Construis la polaire du point A par rapport au cercle $c(C, r)$ donné et écris une marche à suivre rigoureuse :

