Série 29

Pour le 28 mai 2025

Exercice 1

Etudie la conique donnée par l'équation $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 10x + 4 = 0$. Effectue un changement de coordonnées pour placer un axe horizontalement, puis un autre pour centrer la conique en l'origine. Donne les valeurs caractéristiques de la conique (a, b et c).

Exercice 2

Etudie la conique donnée par l'équation $x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 16 = 0$. Effectue un changement de coordonnées pour placer un axe horizontalement, puis un autre pour centrer la conique en l'origine. Donne les valeurs caractéristiques de la conique (a, b et c).

Exercice 3

On considère l'intersection dans $\mathbb{R}^3$ du plan $y = z$ avec le cylindre $x^2 + y^2 = 1$. Démontre qu'il s'agit d'une ellipse, puis donne les coordonnées du centre, des sommets et des foyers.
Indication. Utilise une base orthonormée du plan $y = z$ dans $\mathbb{R}^3$ pour trouver une expression analytique de l'ellipse.

Exercice 4

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) L'intersection d'un cône de révolution et d'un plan est soit une conique, soit un point, soit l'ensemble vide.

b) L'intersection d'un plan et d'une sphère n'est jamais une conique.

c) L'intersection d'un cône de révolution d'axe Oz et d'un plan vertical est toujours une hyperbole.

d) L'équation $x^2 + xy - y^2 + x + y + 10000 = 0$ décrit une hyperbole.

e) L'équation $x^2 + 2xy + y^2 = 4$ décrit une parabole.

f) L'ellipse d'équation $x^2 + y^2 = 4$ a pour foyers les points $(0; 0)$ et $(0; \sqrt{2}/2)$.

Exercice 5

Etudie les coniques suivantes. Donne dans tous les cas le genre de conique, le centre et/ou le(s) sommet(s), la direction des axes, les longueurs des demi-axes et les coordonnées des foyers.

a) $16x^2 + 25y^2 - 64x + 150y - 111 = 0\,$;

b) $5x^2 + y^2 - 50x + 8y + 121 = 0\,$;

c) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 128y - 319 = 0\,$;

d) $4x^2 - 9y^2 - 24x - 72y - 108 = 0\,$;

e) $4x^2 + 8x - 3y - 5 = 0\,$;

f) $x^2 + x - 6 = 0$.

Exercice 6

On considère la surface dans $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

a) Détermine l'intersection de cette surface avec le plan vertical $x = 0\,$;

b) Détermine l'intersection de cette surface avec le plan $x = 1\,$;

c) Détermine l'intersection de cette surface avec un plan horizontal $z = h$.

Exercice 7

On considère l'ellipse d'équation $x^2 + 5y^2 = 20$. Trouve l'aire du rectangle dont une diagonale relie les deux foyers et l'autre diagonale relie deux points de l'ellipse.
Indication. Calcule les coordonnées des foyers, puis cherche les deux autres sommets.

Exercice 8

On considère le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est diagonale, disons $\mathrm{diag}(a, b)$ avec $a, b \geq 0$. Décris l'image du cercle par cette application linéaire en fonction des valeurs de a et b.

Exercices théoriques

Exercice 9

Soit $A = (-c; 0)$ et $B = (c; 0)$ deux points du plan. On considère tous les triangles ΔABC tels que l'angle α en A a pour sinus la tangente de l'angle β en B (ainsi $\sin\alpha = \tan\beta$). Quel est le lieu géométrique décrit par les sommets C de tous ces triangles ?
Indication. Si $C = (x; y)$, utilise de la trigonométrie élémentaire pour trouver une équation quadratique x et y.