

Série 26

Pour le 7 mai 2025

Exercice 1

Associativité du produit vectoriel

On considère trois vecteurs \vec{a}, \vec{b} et \vec{c} de V_3 muni de la base canonique $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, tels que

$$\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad \vec{b} = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \vec{c} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

- Calculer les produits vectoriels $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ et $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$.
- Qu'en déduire sur l'associativité du produit vectoriel ?
- Construire un autre exemple simple où l'un des produits vectoriels est le vecteur nul, mais l'autre pas.

Exercice 2

Anti-commutativité du produit vectoriel.

- Démontrer que $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} de V_3 .
- Calculer $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$ et $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2$ où $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base canonique de V_3 .

Exercice 3

Distributivité du produit vectoriel. Démontrer que $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$.

Exercice 4

Le produit mixte et le volume d'un parallélépipède.

Soient trois vecteurs \vec{a}, \vec{b} et \vec{c} de V_3 . On construit un parallélépipède sur ces trois vecteurs et on choisit le parallélogramme construit sur \vec{b} et \vec{c} comme base.

On définit le *produit mixte* des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ comme suit : $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = \vec{a} \bullet (\vec{b} \wedge \vec{c})$.

- Calculer l'aire de la base du parallélépipède en fonction de la longueur des vecteurs et de l'angle α entre \vec{b} et \vec{c} .
- Calculer la hauteur du parallélépipède en utilisant la projection orthogonale de \vec{a} sur $\vec{b} \wedge \vec{c}$. Dessiner une figure d'étude.
- Calculer le volume du parallélépipède et montrer qu'il est égal à la valeur absolue du produit mixte.

d) Développer le produit mixte $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}]$ des vecteurs donnés avec leurs composantes

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

e) Montrer que $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

f) Dédire du calcul précédent que la valeur absolue du déterminant ci-dessus donne le volume du parallélépipède.

g) Calculer le volume du parallélépipède construit sur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

h) Calculer le volume du parallélépipède construit sur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Vérifier que les points $A = (-1; -1; 7)$, $B(-2; 1; 6)$, $C(0; 1; 6)$, $D(1; -1; 7)$, $E(2; -2; 3)$, $F(1; 0; 2)$, $G(3; 0; 2)$ et $H(4; -2; 3)$ sont les sommets d'un parallélépipède et calculer son volume.

Exercice 6

Utiliser un déterminant pour décider si les points $A(1; 1; 3)$, $B(5; 2; 4)$, $C(3; -1; 7)$ et $D(6; 1; 8)$ sont coplanaires ou non.

Exercice 7

Vérifier que les points $A(2; 1; -2)$, $B(2; 3; 0)$, $C(6; 6; 5)$ et $D(6; 4; 3)$ sont les sommets d'un parallélogramme, puis calculer son aire à l'aide d'un produit vectoriel.

Exercice 8

Déterminer un vecteur perpendiculaire au plan contenant $A(2; 1; 6)$, $B(-1; 4; 3)$ et $C(2; 0; -3)$.

Exercice 9

Montrer que si $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, alors $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{c}$. *Indication.* Calculer $\vec{a} \wedge (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

En déduire un théorème trigonométrique bien connu du triangle quelconque.

Exercice 10

Volume du tétraèdre. On considère les points suivants de \mathbb{R}^3 muni d'une repère orthonormé :

$$A(2; 2; 3), \quad B(1; 4; 3), \quad C(-1; 4; 2) \quad \text{et} \quad D(0; 1; 0).$$

- Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs \vec{DA} , \vec{DB} et \vec{DC} ;
- Calculer le volume du tétraèdre de sommets A, B, C et D .
- Calculer l'aire de la surface du tétraèdre.

Exercice 11

Les diagonales d'un parallélogramme.

On considère deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} et le parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.

- Montrer que $(\vec{b} - \vec{a}) \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{b} \wedge \vec{a}$;
- Déduire de la partie précédente que l'aire du parallélogramme construit sur les diagonales du premier parallélogramme est le double de l'aire de celui-ci.

Exercice 12

Identité de Gibbs. Démontrer que $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Exercice 13

On considère une base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ de \mathbb{R}^3 . On suppose qu'elle n'est pas directe.

- Montrer que la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, -\vec{f}_3)$ est directe.
- Montrer que la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_3, \vec{f}_2)$ est directe.
- Montrer que la base $(\vec{f}_3, \vec{f}_1, \vec{f}_2)$ n'est pas directe.

Exercice 14

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

- Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls est non nul.
- Le déterminant d'une matrice 3×3 est positif ou nul car il permet de calculer le volume d'un parallélépipède.
- Si les vecteurs \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} et \vec{d} sont coplanaires, alors $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \vec{0}$.
- Si $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \vec{0}$, alors les vecteurs \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} et \vec{d} sont coplanaires.
- Le produit $(\vec{a} \bullet \vec{b}) \cdot \vec{c}$ est un vecteur.
- Le produit $\vec{a} \wedge (\vec{b} \bullet \vec{c})$ est un nombre.
- Le produit $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ est un vecteur.