$f : [a ; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue ou au moins intégrable

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

V. Intégrales généralisées

Que se passe-t-il si $f :]a ; b[\longrightarrow \mathbb{R}$?

c'est-à-dire $f(a)$ ou $f(b)$ non défini ?

Nous avons jusqu'ici calculé des intégrales de fonctions définies sur un intervalle fermé $[a, b]$. Parfois, il est possible d'étendre ces méthodes au cas de fonctions définies sur un intervalle "semi-ouvert" $[a, b[$ ou $]a, b]$ ou même ouvert $]a, b[$. D'autres fois encore, on peut calculer une intégrale définie sur un intervalle non-borné de la forme $[a, \infty[$ ou $] - \infty, b]$. Nous aimerions obtenir des critères qui nous permettent de savoir quelles fonctions on peut intégrer sur de tels intervalles.
La quasi totalité de ce chapitre est tirée du chapitre 8 de l'ouvrage de J. Douchet et B. Zwahlen.

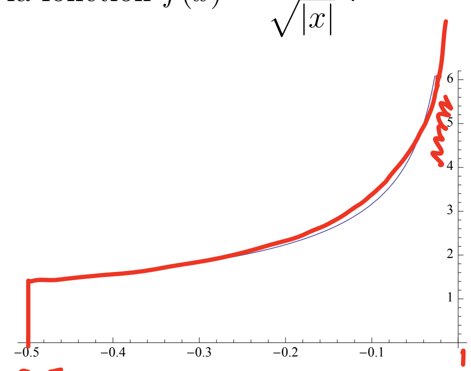
1 Le cas d'un intervalle borné

Nous étudions dans cette section l'intégrabilité de fonctions réelles définies sur un intervalle de la forme $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$. Nous traiterons en détail le premier cas, les autres ne présentent pas de surprises particulières. L'expression

$$\int_a^b f(x)dx$$

n'a pas de sens lorsque f n'est pas définie en b (on ne peut calculer ni la somme de Darboux inférieure, ni la somme de Darboux supérieure, à cause du dernier morceau de la subdivision). Voici par exemple le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$:

$ED_f = \mathbb{R}^*$



$-0{,}5$ 0

$$\int_{-0{,}5}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = ?$$

Néanmoins, peut-être que l'aire de la surface située entre l'axe Ox et le graphe est malgré tout finie ? On pose donc

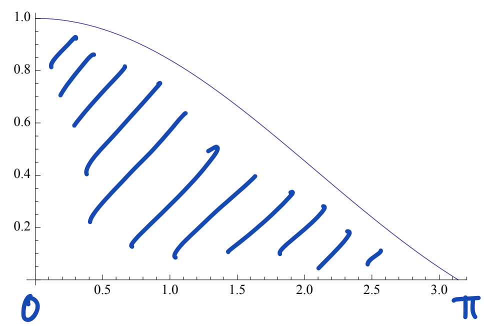
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{avec } x \in [a ; b[$$

et on cherche à calculer la limite $\lim_{x \to b^-} F(x)$.

Définition 1.1. On dit que l'*intégrale généralisée* $\int_a^{b^-} f(t)dt$ *existe* ou *converge* si la limite $\lim_{x \to b^-} F(x)$ existe. Sinon, on dit que l'intégrale généralisée n'existe pas ou qu'elle diverge.

Exemple 1.2. Lorsque la fonction $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ peut être prolongée par continuité en b en une fonction $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée $\int_a^{b^-} f(t)dt$ converge et coïncide avec $\int_a^b \tilde{f}(t)dt$.

Par exemple $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ définie sur $]0 ; \pi]$ est prolongeable par continuité en posant $\tilde{f}(0) = 1$.



Cela ne veut pas dire pour autant que cette intégrale est facile à calculer. En fait, dans ce cas précis, on obtient le *sinus intégral* de π. Allez donc voir sur internet (chez Wolfram, par exemple, il y a une illustration du graphe de cette fonction $Si(x)$).

Notre principal critère de convergence des intégrales généralisées sera basé sur l'étude des fonctions $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. avec $\alpha > 0$ définies sur $\mathbb{R}^*$

Théorème 1.3. *Soit α un nombre réel. L'intégrale généralisée $\int_{0^+}^b \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge lorsque $\alpha < 1$ et diverge lorsque $\alpha \geq 1$.*

Démonstration.

- Si $\alpha = 1$, une primitive de $\frac{1}{t}$ est $\ln|t|$ et

$$F(x) = \int_x^b \frac{1}{t}\,dt = \ln|b| - \ln|x| \xrightarrow{x \to 0} \ln|b| + \infty$$

et la limite diverge.

$$\frac{1}{t^\alpha} = t^{-\alpha} \xrightarrow{\int dt} \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$

- Si $\alpha \neq 1$, alors une primitive de $\frac{1}{t^\alpha}$ est $\frac{+1}{-(\alpha-1)\,t^{\alpha-1}} = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Si $\alpha < 1$, $\lim_{t \to 0} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} = 0 \Rightarrow \int_{0_+}^b \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ existe.

Si $\alpha > 1$, $\lim_{t \to 0_+} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} = -\infty \Rightarrow \int_{0_+}^b \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ diverge. □

Nous pouvons encore calculer la valeur de l'intégrale généralisée lorsque $\alpha < 1$:

$$\int_{0^+}^b \frac{1}{t^\alpha}dt = \left.\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_0^b = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Exemple 1.4. Dans le cas de la fonction $1/\sqrt{|x|}$ que nous avons admirée tout à l'heure, on trouve en particulier que

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0_-} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx \overset{\text{fct paire}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\,\Big|_0^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} - 0 = \frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Pour terminer, nous citons sans explications (ce seraient les mêmes que pour les fonctions intégrables que nous avons étudiées jusqu'ici) que l'intégrale généralisée est linéaire et qu'elle préserve la relation d'ordre $\leq$.

2 Critères de convergence

Nous établissons ici plusieurs critères de convergence. Commençons avec des fonctions positives.

Proposition 2.1. *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue réelle positive ou nulle. Alors $\int_a^{b^-} f(t)dt$ existe si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que $\int_a^x f(t)dt \leq M$ pour tout $a \leq x < b$.*

Démonstration. Comme f est positive, la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est croissante.

Donc, F converge si et seulement si elle est bornée.

□

Corollaire 2.2. Critère de comparaison. *Supposons que $g(x) \geq f(x) \geq 0$ au voisinage de b. Alors l'intégrale généralisée de f existe si celle de g existe et celle de g diverge si celle de f diverge.*

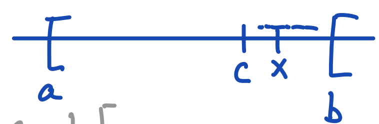
Voici enfin notre critère de convergence. Il utilise le critère de comparaison et notre connaissance des fonctions $1/x^\alpha$.

Théorème 2.3. Critère de convergence. *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la limite $l = \lim_{x\to b^-} (b-x)^\alpha f(x)$ est non nulle.*

Alors l'intégrale généralisée $\int_a^{b^-} f(x)dx$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.

Démonstration. Supposons que la limite l est strictement positive (quitte à remplacer f par $-f$). Il existe donc un nombre $c < b$ tel que pour tout $c < x < b$,

$$\frac{\ell}{2} \leq \underbrace{(b-x)^\alpha \cdot f(x)}_{\in\,]\ell - \varepsilon_c\,;\, \ell + \varepsilon_c[\text{ si } x \in]c;b[} \leq 2\ell$$



$b - x > 0$

$$\Longrightarrow \frac{\ell}{2(b-x)^\alpha} \leq f(x) \leq \frac{2\ell}{(b-x)^\alpha} \overset{t = b-x}{\Longleftrightarrow} \frac{\ell}{2t^\alpha} \leq f(b-t) \leq \frac{2\ell}{t^\alpha}$$

Les intégrales généralisées qui encadrent $f(x)$ existent si $\alpha < 1$ et divergent si $\alpha \geq 1$ par le thm 1.3. Et par le critère de comparaison, il en va de même pour f. □

Exemple 2.4. L'intégrale généralisée $\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}dx$ converge car

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1+x+x^2}}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\cdot f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \neq 0$$

$(1-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} < 1$ donc l'intégrale généralisée converge.

Une notion très utile pour déterminer si une intégrale généralisée existe est la suivante :

Définition 2.5. L'intégrale généralisée $\int_a^{b^-} f(x)dx$ est dite *absolument convergente* si l'intégrale généralisée $\int_a^{b^-} |f(x)|dx$ est convergente.

$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Nous allons voir que cette notion de convergence absolue est plus forte que celle de convergence.

$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Proposition 2.6. *La convergence absolue entraîne la convergence.*

Démonstration. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que l'intégrale généralisée $\int_a^{b^-} |f(x)|dx$ est convergente. On remarque que les fonctions f^+ et f^- admettent aussi une intégrale généralisée sur $[a, b[$ puisqu'il s'agit de fonctions positives, inférieures ou égales à $|f|$.

Puisque $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, l'intégrale généralisée $\int_a^{b^-} f(x)dx$ converge par linéarité. □

Une conséquence forte de cette proposition généralise le résultat vu ci-dessus pour les fonctions que l'on peut prolonger par continuité.

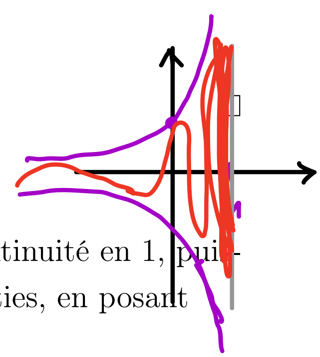
Théorème 2.7. Convergence pour les fonctions bornées. *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^{b^-} f(x)dx$ est convergente.*

Démonstration. Soit M une borne supérieure de la fonction $|f(x)|$.

$\Rightarrow$ $F(x) = \int_a^x |f(t)|\,dt$ est bornée par $M(b-a)$

Prop 2.1 $\Rightarrow$ l'intégrale généralisée $\int_a^{b^-} |f(t)|\,dt$ existe et $\int_a^{b^-} f(t)\,dt$ converge absolument

Prop 2.6 $\Rightarrow$ $\int_a^{b^-} f(t)\,dt$ converge □



Exemple 2.8. Etudions l'intégrale généralisée $\int_0^{1^-} \frac{1}{1-x} \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) dx$.

Tout d'abord, remarquons que la fonction à intégrer ne se prolonge pas par continuité en 1, puisqu'elle oscille de plus en plus rapidement au voisinage de 1. On intègre par parties, en posant

$$f'(x) = -\sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = x - 1.$$

Alors comme $\frac{1}{(1-x)^2}$ est la dérivée interne de $\sin\left(\frac{1}{1-x}\right)$,

$f(x) = \cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$ et $g'(x) = 1$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{1}{1-t}\sin\left(\frac{1}{1-t}\right)dt = \underbrace{\cos\left(\frac{1}{1-t}\right)(t-1)\Big|_0^x}_{(*)} - \underbrace{\int_0^x 1\cdot\cos\left(\frac{1}{1-t}\right)dt}_{(*)}$$

$(*)$ converge car $\cos\left(\frac{1}{1-t}\right) \in [-1;1]$ est borné.

De plus, $(*)$ $(x-1)\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)+\cos 1$

et $\lim_{x\to 1^-} \underbrace{(x-1)}_{\to 0}\underbrace{\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}_{\text{borné par } -1 \text{ et } 1} = 0$

l'intégrale généralisée converge.

3 Le cas d'un intervalle non borné

Considérons une fonction réelle et continue $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$. Nous copions mot pour mot ce que nous avons fait auparavant en remplaçant chaque symbole " $\lim_{x\to b^-}$ " par " $\lim_{x\to\infty}$ ". Ainsi, par exemple, on dit que l'*intégrale généralisée* $\int_a^\infty f(t)dt$ *existe* ou *converge* si la limite $\lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)dt$ existe. Nous passons à nouveau sur la linéarité et la préservation de la relation d'ordre $\leq$.

Exemple 3.1. Etudions la convergence de l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$. Nous avons vu que l'intégrale généralisée de la fonction $1/x$ diverge sur $]0,1]$, aurons-nous plus de chance vers l'infini ? NON

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln t\Big|_1^x = \ln x - \underbrace{\ln 1}_{=0} = \ln x \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$$

Plus généralement, l'étude des fonctions de la forme $1/t^\beta$ est riche en conséquences.

Proposition 3.2. *L'intégrale généralisée* $\int_a^\infty \frac{1}{x^\beta}dx$ *converge pour* $\beta > 1$ *et diverge pour* $\beta \leq 1$.

Démonstration. Lorsque $\beta < 1$, $t^\beta < t^1$ $\forall t > 1 \iff \frac{1}{t} < \frac{1}{t^\beta}$

$\Rightarrow$ par la divergence de $\int_1^\infty \frac{1}{t}dt$, on a que $\int_1^\infty \frac{1}{t^\beta}dt$ diverge.

et si $\beta > 1$, alors

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{t^\beta}dt = \frac{t^{1-\beta}}{1-\beta}\Big|_a^x = \frac{1}{1-\beta}\left(x^{1-\beta} - a^{1-\beta}\right) \longrightarrow \frac{-a^{1-\beta}}{1-\beta} \quad \square$$

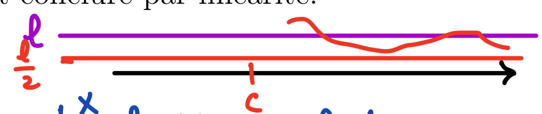
$$x^{1-\beta} = \frac{1}{x^{\beta-1}} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

où $\beta > 0$

Les fonctions $\dfrac{1}{x^\beta}$ ont la propriété de tendre vers zéro lorsque x tend vers l'infini. Elles avaient donc toutes, a priori, une chance de faire converger leur intégrale généralisée. En effet, si tel n'était pas le cas, la convergence est exclue.

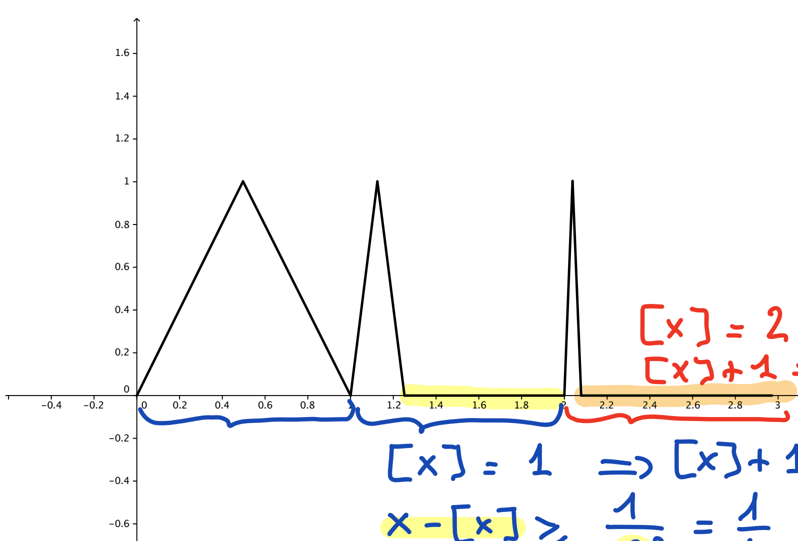
Proposition 3.3. *Soit $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue pour laquelle l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ converge. Alors, si la limite $l = \lim_{x\to\infty} f(x)$ existe, elle doit être nulle : $l = 0$.*

Démonstration.
Supposons par l'absurde que $l > 0$, quitte à remplacer f par $-f$ et conclure par linéarité.
Il existe alors $c > a$ tel que $f(x) \geqslant \frac{l}{2} \quad \forall x > c$



Ainsi $$\int_c^\infty f(t)\,dt \geqslant \int_c^\infty \frac{l}{2}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_c^x \frac{l}{2}\,dt = \frac{l}{2}(x-c)$$
$$= \frac{l}{2}(x-c) \xrightarrow{x\to\infty} +\infty$$
ce qui contredit la convergence de $\int_a^\infty f(t)\,dt$. □

Remarque 3.4. Il existe des fonctions qui n'admettent pas de limite à l'infini et qui pourtant sont intégrables sur $[a, \infty[$. On peut construire de telles fonctions de la manière suivante. On décide que $f(x) = 0$ pour $x - [x] \geq 1/([x] + 1)^2$. Ainsi la fonction est nulle sur une partie de plus en plus grande de chaque intervalle $[n, n+1]$. Sur le début de chacun de ces intervalles, on définit f de sorte à ce que son graphe forme un triangle isocèle de hauteur 1, comme ceci :



$[x] = 2$
$[x] + 1 = 3$
$x - [x] \geqslant \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$[x] = 1 \implies [x] + 1 = 2$
$x - [x] \geqslant \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

L'aire de chacun de ces triangles vaut $1/2 \cdot 1/n^2 \cdot 1$. La somme de ces aires converge (vers $\pi^2/12$), si bien que l'intégrale généralisée de cette fonction existe sans pour autant que f ait de limite.

Terminons avec un exemple d'une fonction définie sur un intervalle fermé et où un changement de variables nous permet de calculer l'intégrale généralisée en passant par $\mathbb{R}$ tout entier !

Exemple 3.5. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2+\sin(x)}$ et on cherche à calculer $I = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$, une intégrale qui existe puisque f est continue et définie sur $[-\pi, \pi]$.

Effectuons le changement de variables $x = \varphi(t) = 2\arctan(t)$ d'où $\varphi'(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$.

$\sin\alpha \cos\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

on écrit $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, on développe et on y arrive !

Calculons d'abord $\sin(2\arctan(t)) = 2\sin(\arctan t)\cos(\arctan t)$

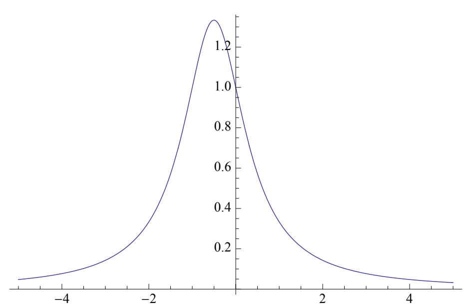
$= 2\,\dfrac{t}{1+t^2}$

$\pm\dfrac{\pi}{2} = \cancel{2}\arctan t \iff$ "$t = \pm\infty$"

Par conséquent, on obtient

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{2(1+t^2)+2t}\,dt \;\; = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+t+1}\,dt$$

Voici le graphe de cette fraction rationnelle. Heureusement, les limites vers $\pm\infty$ sont nulles.



On continue avec la formule d'intégration d'éléments simples ou, ici, en complétant le carré :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dt = \ldots\ldots = \frac{2\cancel{4}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\pi\,.$$