

**Algèbre linéaire avancée II**  
printemps 2026

**Série 7 – Corrigé**

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (\*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (\*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (\*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (\*) sera une question ouverte de l'examen final.

**Exercice 1.** (+) Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice hermitienne et soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Montrer que  $\lambda$  est réelle.

**Solution.** Pour  $x$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  on a que

$$\begin{aligned}
 \lambda x^T \bar{x} &= (\lambda x)^T \bar{x} \\
 &= (Ax)^T \bar{x} \\
 &= x^T A^T \bar{x} \\
 &= x^T \overline{A^T x} \\
 &= x^T \overline{A^* x} \\
 &= x^T \overline{Ax} \\
 &= x^T \overline{\lambda x} \\
 &= \bar{\lambda} x^T \bar{x}
 \end{aligned}$$

Comme  $x^T \bar{x} \neq 0$ , on a  $\lambda = \bar{\lambda}$ , donc  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 2.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice hermitienne et inversible. Montrer que si toutes les valeurs propres de  $A$  sont positives, alors toutes les valeurs propres de  $A^{-1}$  sont aussi positives.

**Solution.** Supposons que les valeurs propres de  $A$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , sont positives. On va montrer que  $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$  sont les valeurs propres de  $A^{-1}$ :

Comme  $A$  est une matrice hermitienne, il existe une matrice unitaire  $P$  telle que  $P^*AP = D$ , où  $D$  est une matrice diagonale.

Comme  $\det(P^*)\det(P) = 1$ ,

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda I) &= \det(P^*)\det(A - \lambda I)\det(P) \\
 &= \det(P^*(A - \lambda I)P) \\
 &= \det(P^*AP - \lambda P^*P) \\
 &= \det(D - \lambda I),
 \end{aligned}$$

donc  $D$  a les nombres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sur la diagonale. Alors

$$I = P^*P = P^*AA^{-1}P = P^*APP^*A^{-1}P = D(P^*A^{-1}P).$$

Ça signifie que  $P^*A^{-1}P = D^{-1}$ , et les valeurs propres de  $A^{-1}$  sont exactement les valeurs propres de  $D^{-1}$  à savoir  $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ .

**Exercice 3.** Soient  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . On définit  $(A, B) := \text{tr}(AB)$  et  $[A, B] := AB - BA$ .

1. Montrer que  $(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire symétrique.
2. Montrer que  $(\cdot, \cdot)$  est invariante, c'est-à-dire  $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  on a que

$$([A, B], C) + (B, [A, C]) = 0.$$

3. Montrer que  $(\cdot, \cdot)$  est non-dégénérée.

Maintenant on considère

$$\mathfrak{o}_n := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T + A = 0\}$$

et

$$\mathfrak{sp}_{2n} := \{A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid A^T \Omega + \Omega A = 0\}$$

où

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}.$$

4. Montrer que  $(\cdot, \cdot)|_{\mathfrak{o}_n}$  et  $(\cdot, \cdot)|_{\mathfrak{sp}_{2n}}$  sont non-dégénérées.

**Solution.** 1. Vérification immédiate à partir des définitions.

2. Vérification immédiate à partir des définitions.

3. Il s'agit d'une conséquence du calcul qui suit,

$$(E_{ij}, E_{kl}) = \text{tr}(E_{ij}E_{kl}) = \delta_{kj}\delta_{il}.$$

4. Supposons que  $X \in \mathfrak{o}_n$  est tel que  $\text{tr}(XY) = 0$  pour tout  $Y \in \mathfrak{o}_n$ . En particulier, on a

$$0 = \text{tr}(X(E_{ij} - E_{ji})) = 2X_{ji}$$

pour tout  $i \neq j$ . Ceci montre que  $X = 0$  et on conclut que  $(\cdot, \cdot)|_{\mathfrak{o}_n}$  est non-dégénérée.

Prenons maintenant  $X \in \mathfrak{sp}_{2n}$  tel que  $\text{tr}(XY) = 0$  pour tout  $Y \in \mathfrak{sp}_{2n}$ . On observe que

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}$$

où  $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et les matrices  $B$  et  $C$  sont symétriques (ceci est vrai pour toute matrice appartenant à  $\mathfrak{sp}_{2n}$ ). On prend

$$Y = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & -A'^T \end{pmatrix}$$

et donc

$$0 = \text{tr}(XY) = 2\text{tr}(AA')$$

et comme  $A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice quelconque on conclut par le point 3 que  $A = 0$ . Maintenant on considère

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ij} + E_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$0 = \text{tr}(XY) = 2B_{ij},$$

ce qui montre qu'on a  $B = 0$ . Similairement on prouve que  $C = 0$  et donc  $X = 0$ . La forme bilinéaire symétrique  $(\cdot, \cdot)|_{\mathfrak{sp}_n}$  est non-dégénérée.

**Exercice 4.** Soit  $V$  un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On considère des éléments  $v_1, \dots, v_n \in V$  et on suppose qu'il existe  $u \in V$  tel que  $\langle v_i, u \rangle > 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $\langle v_i, v_j \rangle \leq 0$  pour tout  $i \neq j$ . Montrer que l'ensemble  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est libre.

**Solution.** On suppose par contradiction qu'on est dans la situation suivante

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \sum_{j=k+1}^n \mu_j v_j$$

avec  $\lambda_i, \mu_j \geq 0$  et on a au moins un  $i_0$  tel que  $\lambda_{i_0} > 0$ . Alors

$$\left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i, \sum_{j=k+1}^n \mu_j v_j \right\rangle = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \langle v_i, v_j \rangle \leq 0.$$

Ainsi on a  $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0$  et par la suite

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i, u \right\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle v_i, u \rangle \geq \lambda_{i_0} \langle v_{i_0}, u \rangle > 0,$$

ce qui est contradictoire.

**Exercice 5.** Soit  $V$  un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et soit  $\{v_1, \dots, v_n\}$  une base de  $V$ . On suppose que  $\langle v_i, v_j \rangle \leq 0$  pour tout  $i \neq j$  et qu'il existe  $x, y \in V$  tel que  $\langle x, v_i \rangle > 0$  et  $\langle y, v_i \rangle > 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Montrer que  $\langle x, y \rangle \geq 0$ .

**Solution.** On suppose par contradiction que  $\langle x, y \rangle < 0$  et on applique l'exercice 2 avec  $u = x$  à l'ensemble  $\{v_1, \dots, v_n, -y\}$ . Comme  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est déjà une base de  $V$ , on obtient une contradiction.

**Exercice 6.** Soient les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la distance entre  $u$  et  $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ ? La distance entre  $u$  et  $V$  est

$$\text{dist}(u, V) = \min_{v \in V} \|u - v\|,$$

où la norme  $\|\cdot\|$  est par rapport au produit scalaire ordinaire.

**Solution.** Soit  $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ . La distance entre un vecteur  $u$  et un sous-espace  $V$  est par définition  $\min_{v \in V} \|u - v\|$ . En posant

$$A = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient  $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^3\}$ , donc  $\min_{v \in V} \|u - v\| = \min_{x \in \mathbb{R}^3} \|u - Ax\|$ . On sait du cours que la solution  $x^*$  du système  $A^T A x = A^T u$  est un vecteur tel que  $\|u - Ax\|$  est minimisée. Donc il suffit de résoudre ce système et alors  $\|Ax^* - u\|$  est la réponse voulue.

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & A^T u &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ (A^T A)^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, & (A^T A)^{-1} A^T u &= x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|Ax^* - u\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 2$$

est la réponse voulue.

*Preuve alternative:* On applique le procédé de Gram-Schmidt sur  $v_1, v_2, v_3, u$  pour obtenir une base orthogonale  $v'_1, v'_2, v'_3, u'$ . Alors,  $u = u' + x$ , où  $x \in \text{span}(v_1, v_2, v_3)$  et  $\|u'\| = \text{dist}(u, V)$  comme expliqué dans le polycopié.

**Exercice 7.** Soit  $K$  un corps et  $A \in K^{n \times n}$ . On note  $p(z) := \det(A - zI)$  son polynôme caractéristique qui est de la forme

$$p(z) =: a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n.$$

À l'aide de la formule de Leibniz, montrer les propositions suivantes :

1.  $a_0 = \det(A)$ ,
2.  $a_n = (-1)^n$ ,
3.  $a_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Tr}(A)$ ,
4.  $a_{n-k} = (-1)^{n-k} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \det(A_I)$ ,

pour  $1 \leq k \leq n$ , et où  $A_I$  est la sous-matrice obtenue en extrayant les lignes et les colonnes de  $A$  d'indice dans  $I$ .

*Indication pour la question 4 :* écrire, pour une permutation  $\sigma \in S_n$ ,

$$\prod_{i=1}^n (A - zI)_{i, \sigma(i)} = \prod_{i=1}^n (A_{i, \sigma(i)} - z\delta_{i, \sigma(i)}) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \prod_{i \in I} A_{i, \sigma(i)} \prod_{j \notin I} (-z\delta_{j, \sigma(j)}).$$

**Solution.** 1. En évaluant  $p(z)$  en 0, on trouve

$$a_0 = a_0 + a_1 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 = p(0) = \det(A).$$

2. On observe que

$$\begin{aligned} p(z) &= \det(A - zI) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n (A - zI)_{i, \sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n (A_{i, \sigma(i)} - z\delta_{i, \sigma(i)}) \end{aligned}$$

est un polynôme de degré au plus  $n$ . On fixe un élément  $\sigma$  et on considère le polynôme  $p_\sigma(z) := \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n (A_{i, \sigma(i)} - z\delta_{i, \sigma(i)})$ . Si  $\sigma$  n'est pas égal à l'identité, il existe au moins deux indices distincts  $k, l \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\sigma(k) \neq k$  et  $\sigma(l) \neq l$  (par exemple on peut choisir  $l = \sigma(k)$ ). Ceci implique que  $\delta_{k, \sigma(k)} = \delta_{l, \sigma(l)} = 0$  et que  $p_\sigma(z)$  est un polynôme de degré au plus  $n-2$ . Ainsi seulement pour  $\sigma = \text{id}$  on trouve que  $p_\sigma(z)$  est de degré  $n$ . Pour trouver le coefficient  $a_n$  il suffit alors d'observer

$$p_{\text{id}}(z) = \text{sign}(\text{id}) \prod_{i=1}^n (A_{i, i} - z\delta_{i, i}) = \prod_{i=1}^n (A_{i, i} - z) = (-1)^n z^n + \dots$$

On trouve  $a_n = (-1)^n$ .

3. Dans la question précédente on a montré que pour  $\sigma \neq \text{id}$  le polynôme  $p_\sigma(z)$  est de degré au plus  $n - 2$ . Ainsi pour déterminer le coefficient  $a_{n-1}$  il suffit à nouveau de considérer

$$p_{\text{id}}(z) = \prod_{i=1}^n (A_{i,i} - z) = (-1)^n z^n + (-1)^{n-1} (A_{1,1} + \dots + A_{n,n}) z^{n-1} + \dots$$

On trouve  $a_{n-1} = (-1)^{n-1} (A_{1,1} + \dots + A_{n,n}) = (-1)^{n-1} \text{Tr}(A)$ .

4. D'abord on introduit la notation suivante pour simplifier nos calculs:  $[n] := \{1, \dots, n\}$ . En plus on remarque que

$$\prod_{i=1}^n (b_i + c_i) = \sum_{I \subseteq [n]} \left( \prod_{i \in I} b_i \prod_{i \notin I} c_i \right).$$

Ceci implique pour la formule de Leibniz

$$\begin{aligned} \det(A - zI) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n (A - zI)_{i, \sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \sum_{I \subseteq [n]} \prod_{i \in I} A_{i, \sigma(i)} \prod_{i \notin I} (-z\delta_{i, \sigma(i)}) \\ &= \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{n-|I|} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i \in I} A_{i, \sigma(i)} \prod_{i \notin I} z\delta_{i, \sigma(i)}. \end{aligned}$$

Si on fixe  $I \subseteq [n]$  et  $\sigma \in S_n$  on observe que le dernier produit est nul si  $\sigma$  ne fixe pas tous les éléments de  $[n] \setminus I$ . Donc il suffit de considérer les éléments de  $S_n$  qui fixent  $[n] \setminus I$  dans la somme. Donc on a

$$\begin{aligned} &\sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{n-|I|} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i \in I} A_{i, \sigma(i)} \prod_{i \notin I} z\delta_{i, \sigma(i)} \\ &= \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{n-|I|} z^{n-|I|} \sum_{\sigma \in S_I} \text{sign}(\sigma) \prod_{i \in I} A_{i, \sigma(i)}. \end{aligned}$$

Mais comme  $\det(A_I) = \sum_{\sigma \in S_I} \text{sign}(\sigma) \prod_{i \in I} A_{i, \sigma(i)}$ , on obtient

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{n-|I|} z^{n-|I|} \det(A_I) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{I \subseteq [n], |I|=k} (-1)^{n-k} z^{n-k} \det(A_I) \\ &= \sum_{k=0}^n z^{n-k} \sum_{I \subseteq [n], |I|=k} (-1)^{n-k} \det(A_I) \end{aligned}$$

Ainsi on trouve que

$$a_{n-k} = \sum_{I \subseteq [n], |I|=k} (-1)^{n-k} \det(A_I) = (-1)^{n-k} \sum_{I \subseteq [n], |I|=k} \det(A_I).$$

**Exercice 8.** Soit  $K$  un corps et  $A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times m}$  avec  $m \leq n$ . On pose  $p_M$  le polynôme caractéristique d'une matrice  $M$ .

1. Montrer que 
$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}.$$
2. En déduire que  $p_{BA}(\lambda) = (-1)^{n-m} \lambda^{n-m} p_{AB}(\lambda)$  et donc que les valeurs propres de  $BA$  sont exactement les valeurs propres de  $AB$  (avec multiplicités égales) avec  $n - m$  zéros en plus.
3. En comparant les coefficients de  $\lambda^{n-m}$ , et à l'aide de l'exercice 8, en déduire la *formule de Cauchy-Binet*

$$\det(AB) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=m}} \det(A_{[m], I}) \det(B_{I, [m]}).$$

**Solution.** 1. *Calcul immédiat.*

2. D'après le résultat  $p_{PM P^{-1}} = p_M$ , et comme

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C),$$

on déduit de la question 1 la relation

$$p_{AB}(t)t^n = t^m p_{BA}(t).$$

3. Le coefficient en  $\lambda^{n-m}$  de  $\lambda^{n-m} p_{AB}(\lambda)$  est le coefficient constant de  $p_{AB}$ , c'est-à-dire  $\det(AB)$ . L'exercice 8 conclut en remarquant que

$$(BA)_I = B_{I, [m]} A_{[m], I}.$$

**Exercice 9.** Soit  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$  des vecteurs unitaires et deux à deux orthogonaux par rapport au produit scalaire standard.

Posons  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  la matrice dont les colonnes sont les  $\{a_i\}_{i=1}^m$ , et  $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Im}(A)$  la projection orthogonale sur l'espace  $\text{span}(\{a_i\}_{i=1}^m)$ . Par définition,

$$\Pi(v) = \arg \min_{u \in \text{Im}(A)} \|u - v\|.$$

1. Montrer que  $m \leq n$  à l'aide de l'exercice 4 de la série 6.
2. Montrer que  $\Pi(v) = \sum_{i=1}^m \langle v, a_i \rangle a_i$  à l'aide de l'exercice 5 de la série 6. En déduire que  $\Pi$  est une application linéaire :  $\Pi(v) = Mv$  dans la base canonique pour une certaine matrice  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de rang  $m$ .
3. Montrer que  $M = AA^T$ .

**Solution.** 1. Les  $m$  vecteurs sont linéairement indépendants dans un espace de dimension  $n$ . On a donc forcément  $m \leq n$ .

2. On complète les colonnes de  $A$  en une base orthonormale grâce à Gram-Schmidt. On obtient une base orthonormale  $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_{n-m}\}$ . Par l'exercice 5 de la série 6, on a

$$v = \sum_{i=1}^m \langle v, a_i \rangle a_i + \sum_{i=1}^{n-m} \langle v, b_i \rangle b_i \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,$$

et on a toujours

$$u = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i \quad \forall u \in \text{Im}(A).$$

pour des coefficients  $\alpha_i$ .

Le théorème de Pythagore donne alors  $\|u-v\|^2 = \sum_{i=1}^m (\langle v, a_i \rangle - \alpha_i)^2 + \sum_{i=1}^{n-m} \langle v, b_i \rangle^2$ . L'unique choix de coefficients  $\alpha_i$  et donc de vecteur  $u$  qui minimisent cette norme est bien  $\alpha_i = \langle a_i, v \rangle$ , ce qui conclut.

3. En manipulant l'expression obtenue précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} \Pi(v) &= \sum_{i=1}^m \langle v, a_i \rangle a_i = \sum_{i=1}^m a_i \langle a_i, v \rangle, \\ &= \sum_{i=1}^m a_i a_i^T v, \\ &= \left( \sum_{i=1}^m a_i a_i^T \right) v. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à bien vérifier que  $\sum_{i=1}^m a_i a_i^T = AA^T$ .

**Exercice 10.** On considère cette fois-ci une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  dont les colonnes sont supposées linéairement indépendantes. On considère à nouveau le cas du produit scalaire standard.

1. Montrer que  $\ker(A^T A) = \{0\}$  et donc que  $A^T A$  est inversible.

Soit  $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Im}(A)$  la projection orthogonale sur  $\text{Im}(A)$ , et soit  $A = A^* R$  la décomposition QR de  $A$  (corollaire 5.9 des notes du cours).

2. Montrer que  $R$  est inversible et donc que  $\Pi$  coïncide avec la projection orthogonale sur  $\text{Im}(A^*)$ . Dédurre de l'exercice précédent que  $\Pi = A^*(A^*)^T$ .

3. Montrer que  $A^T A = R^T R$ .

4. Conclure que  $\Pi = A(A^T A)^{-1} A^T$ .

**Solution.** 1. Pour un  $x \in \ker(A^T A)$ , on a  $A^T A x = 0$ , et donc aussi  $x^T A^T A x = 0$ . Par suite,  $\|Ax\|^2 = 0$  et alors  $Ax = 0$ . Or les colonnes de  $A$  ont été supposées linéairement indépendantes, et donc  $x = 0$  est l'unique solution.

2. La matrice  $R$  est triangulaire supérieure, et les éléments de sa diagonale sont des normes de vecteurs non nuls. Son déterminant est donc non nul et  $R$  est inversible. Il suit en particulier que  $\text{Im}(A) = \text{Im}(A^*)$ . L'exercice précédent donne directement  $\Pi = A^*(A^*)^T$ .
3. On a directement  $AA^T = R^T(A^*)^T A^* R$ . De plus, les colonnes de  $A^*$  étant orthonormales, on en déduit immédiatement  $(A^*)^T A^* = I$ , d'où le résultat.
4. En partant de la relation  $\Pi = A^*(A^*)^T$ , et comme  $R$  est inversible, on trouve

$$\Pi = A^*(A^*)^T = AR^{-1}R^{-T}A^T = A(R^T R)^{-1}A^T = A(A^T A)^{-1}A^T,$$

comme souhaité.

**Exercice 11.** Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire standard dans  $\mathbb{R}^n$ . Trouver une factorisation  $A = A^*R$  du corollaire 5.9 des matrices suivantes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}.$$

**Solution.** Nous trouvons une factorisation de  $A_2$ , ce qui nous donne une factorisation de  $A_1$  lorsque  $n = 3$ .

On utilise le procédé de Gram-Schmidt et on démontre la forme générale de la factorisation par récurrence.

Soient  $v_1, \dots, v_n$  les colonnes de  $A = A_2$  et  $u_1, \dots, u_n$  les vecteurs obtenus par Gram-Schmidt. Si  $i \geq j + 2$ , on a  $v_i \perp v_1, \dots, v_j$  et donc  $v_i \perp u_1, \dots, u_j$  aussi, car  $\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(u_1, \dots, u_k)$  pour tout  $k$ . L'orthogonalisation de Gram-Schmidt peut donc être simplifiée:

$$u_1 = v_1 \\ u_{j+1} = v_{j+1} - \frac{v_{j+1}^T u_j}{\|u_j\|^2} u_j, \quad 1 \leq j \leq n-1$$

Nous montrons par récurrence que

$$(u_j)_i = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+j}}{j} & i \leq j \\ 1 & i = j+1 \\ 0 & i > j+1 \end{cases}$$

Pour  $j = 1$ , c'est vrai. Supposons que c'est vrai pour un  $j \geq 1$ . On obtient  $\|u_j\|^2 = \frac{j+1}{j}$  et donc le coefficient de Fourier

$$\frac{v_{j+1}^T u_j}{\|u_j\|^2} = j/(j+1).$$

On a

$$\begin{aligned}
(u_{j+1})_i &= \left( v_{j+1} - \frac{v_{j+1}^T u_j}{\|u_j\|^2} u_j \right)_i \\
&= \left( v_{j+1} - \frac{j}{j+1} u_j \right)_i \\
&= \begin{cases} 0 - \frac{j}{j+1} \frac{(-1)^{j+i}}{j} & i \leq j \\ 1 - \frac{j}{j+1} & i = j+1 \\ 1 - 0 & i = j+2 \\ 0 & i > j+2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{(-1)^{(j+1)+i}}{j+1} & i \leq j+1 \\ 1 & i = j+2 \\ 0 & i > j+2 \end{cases}
\end{aligned}$$

La matrice  $R''$  est

$$R''_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \frac{j}{j+1} & i = j-1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Nous avons  $A = A'' R''$  comme désiré. Afin de normaliser les colonnes de  $A''$ , nous multiplions la  $j$ -ième colonne  $u_j$  de  $A''$  par  $\|u_j\|^{-1}$  et la  $j$ -ième ligne de  $R''$  par  $\|u_j\|$ . Ceci nous donne

$$A'' R'' = \underbrace{A'' \begin{pmatrix} \|u_1\|^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \|u_n\|^{-1} \end{pmatrix}}_{=: A'} \underbrace{\begin{pmatrix} \|u_1\| & & \\ & \ddots & \\ & & \|u_n\| \end{pmatrix}}_{R'} R''$$

Finalement, on a

$$A'_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j} (j(j+1))^{-1/2} & i \leq j \\ \sqrt{\frac{j}{j+1}} & i = j+1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

et

$$R'_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{j-1}{j}} & i = j-1 \\ \sqrt{\frac{j+1}{j}} & i = j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Pour la matrice  $A_1$ , ceci implique que

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/6} & \sqrt{1/12} \\ \sqrt{1/2} & \sqrt{1/6} & -\sqrt{1/12} \\ 0 & \sqrt{2/3} & \sqrt{1/12} \\ 0 & 0 & \sqrt{3/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{1/2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & \sqrt{2/3} \\ 0 & 0 & \sqrt{4/3} \end{pmatrix}$$

**Exercice 12.** (\*) Le but de cet exercice est de montrer l'*inégalité d'Hadamard*, c'est-à-dire

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \|a_i\|_2,$$

pour  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dont les colonnes sont  $a_1, \dots, a_n$ .

Soit  $A'$  la matrice dont les colonnes sont  $a_1^*, \dots, a_n^*$ , les vecteurs *non-normalisés* issus de l'orthogonalisation de Gram-Schmidt sur les colonnes de  $A$ . On rappelle la décomposition  $A = A'S$ , où  $S$  est triangulaire supérieure de diagonale 1.

1. Montrer que  $\det(S) = 1$  et que  $\det(A) = \det(A') = \pm \prod_{i=1}^n \|a_i^*\|_2$ .
2. Montrer que  $\|a_i^*\| \leq \|a_i\| \forall i = 1, \dots, n$ , et conclure.

Supposons de surcroît que les coefficients de  $A$  soient tous bornés absolument par  $M \in \mathbb{R}_+ : |A_{ij}| \leq M \forall i, j$ . Dédurre de l'inégalité d'Hadamard que  $|\det(A)| \leq M^n n^{n/2}$ .

**Solution.**