Algèbre linéaire avancée II
printemps 2025

Série 7 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et soit λ une valeur propre de A. Montrer que λ est réelle.

Solution. *Pour x un vecteur propre associé à la valeur propre λ on a que*

$$\begin{aligned}
\lambda x^T\overline{x} &= (\lambda x)^T\overline{x} \\
&= (Ax)^T\overline{x} \\
&= x^TA^T\overline{x} \\
&= x^T\overline{\overline{A^T}x} \\
&= x^T\overline{A^*x} \\
&= x^T\overline{Ax} \\
&= x^T\overline{\lambda x} \\
&= \overline{\lambda}x^T\overline{x}
\end{aligned}$$

Comme $x^T\overline{x} \neq 0$, on a $\lambda = \overline{\lambda}$, donc $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et $u, v \in \mathbb{C}^n$ deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes. Montrer que u et v sont orthogonaux par rapport au produit hermitien standard.

Solution. *Soient u, v des vecteurs propres de A associés aux valeurs $\lambda \neq \mu$. Alors*

$$\begin{aligned}
\lambda u^T\overline{v} &= (\lambda u)^T\overline{v} \\
&= (Au)^T\overline{v} \\
&= u^T\bar{A}\overline{v} \\
&= u^T\overline{Av} \\
&= u^T\overline{\mu v} \\
&= \bar{\mu}u^T\overline{v}.
\end{aligned}$$

Or comme μ est réel par l'exercice précédent, l'inégalité $\lambda \neq \bar{\mu}$ permet de conclure.

Exercice 3. Contraposée du théorème spectral.

Soit $\langle .,. \rangle$ le produit hermitien standard sur $\mathbb{C}$ ($\langle x, y\rangle = x^T\bar{y}$), et soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice diagonalisable telle que :

i) chaque valeur propre est réelle, et

ii) pour tout couple (u, v) de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes, $\langle u, v\rangle = 0$.

Montrer que A se diagonalise dans une base orthonormale. En déduire que A est hermitienne.

Solution. *Nous savons que A se diagonalise, et que les espaces propres différents sont deux à deux orthogonaux grâce à la seconde hypothèse.*

Il s'agit donc uniquement de trouver une base orthonormale de chaque espace propre afin que leur concaténation donne une base orthonormale de $\mathbb{C}^n$ de vecteurs propres de A. Pour cela, on applique simplement Gram-Schmidt sur des bases quelconques de chaque espace propre.

Ceci nous donne

$$A = PDP^{-1}$$

avec P la matrice de vecteurs propres choisis, et D la matrice diagonale des valeurs propres correspondantes. Par orthonormalité dans $\mathbb{C}$, on a $P^T\bar{P} = I$, et donc

$$A = PDP^*.$$

Comme les valeurs propres ont été supposées réelles, A est hermitienne car

$$A^* = (PDP^*)^* = PD^*P^* = A.$$

Exercice 4. Soit A la matrice hermitienne

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i & -3i \\ 2+i & 0 & 1-i \\ 3i & 1+i & 0 \end{bmatrix}.$$

Trouver une matrice unitaire $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ telle que P^*AP est une matrice diagonale.

Solution. *Le polynôme caractéristique de A est*

$$p(x) = det(A - xI) = (x+1)(x-6)(x+2).$$

Les valeurs propres de A sont donc $-1, 6$ et -2. On trouve les bases des espaces propres

$$\lambda_1 = -1 : \qquad b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1+2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 6 : \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1-21i \\ 6-9i \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -2 : \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1+3i \\ -2-i \\ 5 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs b_1, b_2, b_3 sont deux-à-deux orthogonaux, parce que les valeurs propres sont distinctes. Il reste à les normaliser et on obtient

$$p_1 = b_1/||b_1|| = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1+2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = b_2/||b_2|| = \frac{1}{\sqrt{728}}\begin{bmatrix} 1-21i \\ 6-9i \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$p_3 = b_3/||b_3|| = \frac{1}{\sqrt{40}}\begin{bmatrix} 1+3i \\ -2-i \\ 5 \end{bmatrix}$$

On obtient la matrice unitaire

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

et on peut vérifier que

$$P^* \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Exercice 5. Soit $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (resp. $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$) tel que les colonnes de U forment une base orthonormale par rapport au produit scalaire standard (resp. par rapport au produit hermitien standard).

1. Montrer que U est une matrice orthogonale (resp. unitaire).

2. Montrer que les lignes de U forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$).

Solution. *Le cas réel est un cas particulier du cas complexe. On prouve donc uniquement le cas complexe.*

Soit donc $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $U = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix}$, $u_i \in \mathbb{C}^n$ $\forall i$ tels que les colonnes $\{u_1, ..., u_n\}$ de U forment une base orthonormale par rapport au produit hermitien standard, c'est-à-dire

$$u_i^T \overline{u_j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a alors que

$$U^*U = \begin{pmatrix} \overline{u_1}^T \\ \vdots \\ \overline{u_n}^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} = I_n$$

Ceci implique que U est inversible d'inverse $U^{-1} = U^*$, i.e. U est unitaire. En particulier, si on écrit

$$U = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$$

où v_i^T est la i-ème ligne de U, on a que

$$I_n = UU^* = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{v_1} & \dots & \overline{v_n} \end{pmatrix}$$

ce qui est équivalent à

$$v_i^T \overline{v_j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

L'ensemble des lignes $\{v_1, ..., v_n\}$ de U forme donc un ensemble orthonormal. En particulier, c'est un ensemble libre et donc une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ (et si $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, c'est aussi une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$).

Exercice 6. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et inversible. Montrer que si toutes les valeurs propres de A sont positives, alors toutes les valeurs propres de A^{-1} sont aussi positives.

Solution. *Supposons que les valeurs propres de A, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, sont positives. On va montrer que $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ sont les valeurs propres de A^{-1}:*

Comme A est une matrice hermitienne, il existe une matrice unitaire P telle que $P^*AP = D$, où D est une matrice diagonale.

Comme $det(P^*)det(P) = 1$,

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= det(P^*)det(A - \lambda I)det(P) \\ &= det\left(P^*(A - \lambda I)P\right) \\ &= det\left(P^*AP - \lambda P^*P\right) \\ &= det(D - \lambda I), \end{aligned}$$

donc D a les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale. Alors

$$I = P^*P = P^*AA^{-1}P = P^*APP^*A^{-1}P = D(P^*A^{-1}P).$$

Ça signifie que $P^*A^{-1}P = D^{-1}$, et les valeurs propres de A^{-1} sont exactement les valeurs propres de D^{-1} à savoir $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$.

Exercice 7. Soit K un corps et $A \in K^{n\times n}$. On note $p(z) := \det(A - zI)$ son polynôme caractéristique qui est de la forme

$$p(z) =: a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n.$$

À l'aide de la formule de Leibniz, montrer les propositions suivantes :

1. $a_0 = \det(A)$,
2. $a_n = (-1)^n$,

3. $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$,

4. $a_{n-k} = (-1)^{n-k} \sum\limits_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ |I|=k}} \det(A_I)$,
   pour $1 \leq k \leq n$, et où A_I est la sous-matrice obtenue en extrayant les lignes et les colonnes de A d'indice dans I.

Indication pour la question 4 : écrire, pour une permutation $\sigma \in S_n$,

$$\prod_{i=1}^{n}(A - zI)_{i,\sigma(i)} = \prod_{i=1}^{n}(A_{i,\sigma(i)} - z\delta_{i,\sigma(i)}) = \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}} \prod_{i\in I} A_{i,\sigma(i)} \prod_{j\notin I}(-z\delta_{j,\sigma(j)}).$$

Solution. *1. En évaluant $p(z)$ en 0, on trouve*

$$a_0 = a_0 + a_1 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 = p(0) = det(A).$$

2. On observe que

$$\begin{aligned} p(z) &= det(A - zI) \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma) \prod_{i=1}^{n}(A - zI)_{i,\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma) \prod_{i=1}^{n}(A_{i,\sigma(i)} - z\delta_{i,\sigma(i)}) \end{aligned}$$

est un polynôme de degré au plus n. On fixe un élément σ et on considère le polynôme $p_\sigma(z) := sign(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(A_{i,\sigma(i)} - z\delta_{i,\sigma(i)})$. Si σ n'est pas égal à l'identité, il existe au moins deux indices distincts $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\sigma(k) \neq k$ et $\sigma(l) \neq l$ (par exemple on peut choisir $l = \sigma(k)$). Ceci implique que $\delta_{k,\sigma(k)} = \delta_{l,\sigma(l)} = 0$ et que $p_\sigma(z)$ est un polynôme de degré au plus $n-2$. Ainsi seulement pour $\sigma = id$ on trouve que $p_\sigma(z)$ est de degré n. Pour trouver le coefficient a_n il suffit alors d'observer

$$p_{id}(z) = sign(id) \prod_{i=1}^{n}(A_{i,i} - z\delta_{i,i}) = \prod_{i=1}^{n}(A_{i,i} - z) = (-1)^n z^n + \ldots$$

On trouve $a_n = (-1)^n$.

3. Dans la question précédente on a montré que pour $\sigma \neq id$ le polynôme $p_\sigma(z)$ est de degré au plus $n-2$. Ainsi pour déterminer le coefficient a_{n-1} il suffit à nouveau de considérer

$$p_{id}(z) = \prod_{i=1}^{n}(A_{i,i} - z) = (-1)^n z^n + (-1)^{n-1}(A_{1,1} + \ldots + A_{n,n})z^{n-1} + \ldots$$

On trouve $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(A_{1,1} + \ldots + A_{n,n}) = (-1)^{n-1}Tr(A)$.

4. *D'abord on introduit la notation suivante pour simplifier nos calculs:* $[n] := \{1, \ldots, n\}$*. En plus on remarque que*

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i + c_i) = \sum_{I \subseteq [n]} \left(\prod_{i \in I} b_i \prod_{i \notin I} c_i \right).$$

Ceci implique pour la formule de Leibniz

$$\begin{aligned} det(A - zI) &= \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (A - zI)_{i,\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \sum_{I \subseteq [n]} \prod_{i \in I} A_{i,\sigma(i)} \prod_{i \notin I} (-z\delta_{i,\sigma(i)}) \\ &= \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{n-|I|} \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \prod_{i \in I} A_{i,\sigma(i)} \prod_{i \notin I} z\delta_{i,\sigma(i)}. \end{aligned}$$

Si on fixe $I \subseteq [n]$ *et* $\sigma \in S_n$ *on observe que le dernier produit est nul si* σ *ne fixe pas tous les éléments de* $[n] \setminus I$*. Donc il suffit de considérer les éléments de* S_n *qui fixent* $[n] \setminus I$ *dans la somme. Donc on a*

$$\begin{aligned} &\sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{n-|I|} \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \prod_{i \in I} A_{i,\sigma(i)} \prod_{i \notin I} z\delta_{i,\sigma(i)} \\ &= \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{n-|I|} z^{n-|I|} \sum_{\sigma \in S_I} sign(\sigma) \prod_{i \in I} A_{i,\sigma(i)}. \end{aligned}$$

Mais comme $det(A_I) = \sum_{\sigma \in S_I} sign(\sigma) \prod_{i \in I} A_{i,\sigma(i)}$*, on obtient*

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{n-|I|} z^{n-|I|} det(A_I) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{I \subseteq [n], |I|=k} (-1)^{n-k} z^{n-k} det(A_I) \\ &= \sum_{k=0}^{n} z^{n-k} \sum_{I \subseteq [n], |I|=k} (-1)^{n-k} det(A_I) \end{aligned}$$

Ainsi on trouve que

$$a_{n-k} = \sum_{I \subseteq [n], |I|=k} (-1)^{n-k} det(A_I) = (-1)^{n-k} \sum_{I \subseteq [n], |I|=k} det(A_I).$$

Exercice 8. Soit K un corps et $A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times m}$ avec $m \leq n$. On pose p_M le polynôme caractéristique d'une matrice M.

1. Montrer que $\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$.
2. En déduire que $p_{BA}(\lambda) = (-1)^{n-m} \lambda^{n-m} p_{AB}(\lambda)$ et donc que les valeurs propres de BA sont exactement les valeurs propres de AB (avec multiplicités égales) avec $n - m$ zéros en plus.

3. En comparant les coefficients de λ^{n-m}, et à l'aide de l'exercice 7, en déduire la *formule de Cauchy-Binet*

$$\det(AB) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=m}} \det(A_{[m],I}) \det(B_{I,[m]}).$$

Solution. *1. Calcul immédiat.*

2. D'après le résultat $p_{PMP^{-1}} = p_M$, et comme

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C),$$

on déduit de la question 1 la relation

$$p_{AB}(t)t^n = t^m p_{BA}(t).$$

3. Le coefficient en λ^{n-m} de $\lambda^{n-m} p_{AB}(\lambda)$ est le coefficient constant de p_{AB}, c'est-à-dire $\det(AB)$*. L'exercice 7 conclut en remarquant que*

$$(BA)_I = B_{I,[m]} A_{[m],I}.$$

Exercice 9. Soit K un corps, V un K-espace vectoriel et soit $f : V \to V$ une application linéaire supposée diagonalisable.

Définition : un sous-espace vectoriel $W \subseteq V$ est dit *invariant* par f si $f(W) \subseteq W$.

Soit W un sous-espace de V invariant par f. Montrer que la restriction de f à W, $f_{|W} : W \to W$, est également diagonalisable. [1]

Solution. *Il est d'abord clair que $\bigoplus_\lambda (E_\lambda \cap W)$ est bien une somme directe car $\bigoplus_\lambda E_\lambda$ en est une.*

De plus, l'inclusion $\bigoplus_\lambda (E_\lambda \cap W) \subseteq W$ est également immédiate. Montrons donc l'inclusion inverse.

Soit $w \in W$. Décomposons w comme somme de vecteur propres

$$w = \sum_\lambda v_\lambda,$$

où $v_\lambda \in E_\lambda$. Nous cherchons à démontrer que $v_\lambda \in W$ pour chaque λ.

Indexons les valeurs propres (toutes distinctes) λ_i avec $i = 1, \ldots, k$. Remarquons que l'expression

$$f(w) - \lambda_k w = \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - \lambda_k) v_i \in W$$

[1] Remarquez que $V = \bigoplus_\lambda E_\lambda$, où les E_λ sont les différents espaces propres. Montrez que $W = \bigoplus_\lambda (E_\lambda \cap W)$.

car W est invariant par f.

La somme comprend désormais un vecteur de moins qu'avant, et les coefficients devant ceux-ci sont tous non nuls.

On peut désormais réappliquer $f - \lambda_{k-1} id$ (id est l'application identité) pour faire disparaître v_{k-1}. En fait, en répétant le processus,

$$\left(\prod_{j=2}^{k}(f - \lambda_j id)\right)(w) = \prod_{j=2}^{k}(\lambda_1 - \lambda_j)v_1 \in W.$$

Il suit que $v_1 \in W$. Plus généralement, on peut considérer l'application

$$\left(\prod_{j \neq i} \frac{(f - \lambda_j id)}{\lambda_i - \lambda_j}\right)(w) = v_i,$$

qui implique que $v_i \in W \ \forall i$.

Une démonstration par récurrence sur le nombre de vecteurs de la décomposition de w peut également être faite.

Exercice 10. Soient K un corps, V un K-espace vectoriel et f, g deux endomorphismes sur V.

Définition : deux applications linéaires f, g sont *simultanément diagonalisables* s'il existe une base commune de vecteurs propres de f et g.

Montrer que si f et g sont simultanément diagonalisables, alors f et g commutent.

Solution. *Dans la base commune $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ de vecteurs propres de f et g, associés aux valeurs λ_i et μ_i respectivement pour chaque i, on a simplement*

$$\begin{aligned}(f \circ g)(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i) &= f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i b_i),\\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i \lambda_i b_i,\\ &= (g \circ f)(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i).\end{aligned}$$

Exercice 11. (*) Montrer la contraposée de l'exercice 10 : si f et g sont diagonalisables et commutent, alors f et g sont simultanément diagonalisables.

Solution.