

---

**Algèbre linéaire avancée II**  
printemps 2026

---

**Série 7**

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (\*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (\*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (\*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (\*) sera une question ouverte de l'examen final.

---

**Exercice 1.** (+) Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice hermitienne et soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Montrer que  $\lambda$  est réelle.

**Exercice 2.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice hermitienne et inversible. Montrer que si toutes les valeurs propres de  $A$  sont positives, alors toutes les valeurs propres de  $A^{-1}$  sont aussi positives.

**Exercice 3.** Soient  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . On définit  $(A, B) := \text{tr}(AB)$  et  $[A, B] := AB - BA$ .

1. Montrer que  $(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire symétrique.
2. Montrer que  $(\cdot, \cdot)$  est invariante, c'est-à-dire  $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  on a que

$$([A, B], C) + (B, [A, C]) = 0.$$

3. Montrer que  $(\cdot, \cdot)$  est non-dégénérée.

Maintenant on considère

$$\mathfrak{o}_n := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T + A = 0\}$$

et

$$\mathfrak{sp}_{2n} := \{A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid A^T \Omega + \Omega A = 0\}$$

où

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}.$$

4. Montrer que  $(\cdot, \cdot)|_{\mathfrak{o}_n}$  et  $(\cdot, \cdot)|_{\mathfrak{sp}_{2n}}$  sont non-dégénérées.

**Exercice 4.** Soit  $V$  un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On considère des éléments  $v_1, \dots, v_n \in V$  et on suppose qu'il existe  $u \in V$  tel que  $\langle v_i, u \rangle > 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $\langle v_i, v_j \rangle \leq 0$  pour tout  $i \neq j$ . Montrer que l'ensemble  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est libre.

**Exercice 5.** Soit  $V$  un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et soit  $\{v_1, \dots, v_n\}$  une base de  $V$ . On suppose que  $\langle v_i, v_j \rangle \leq 0$  pour tout  $i \neq j$  et qu'il existe  $x, y \in V$  tel que  $\langle x, v_i \rangle > 0$  et  $\langle y, v_i \rangle > 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Montrer que  $\langle x, y \rangle \geq 0$ .

**Exercice 6.** Soient les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la distance entre  $u$  et  $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ ? La distance entre  $u$  et  $V$  est

$$\text{dist}(u, V) = \min_{v \in V} \|u - v\|,$$

où la norme  $\|\cdot\|$  est par rapport au produit scalaire ordinaire.

**Exercice 7.** Soit  $K$  un corps et  $A \in K^{n \times n}$ . On note  $p(z) := \det(A - zI)$  son polynôme caractéristique qui est de la forme

$$p(z) =: a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n.$$

À l'aide de la formule de Leibniz, montrer les propositions suivantes :

1.  $a_0 = \det(A)$ ,
2.  $a_n = (-1)^n$ ,
3.  $a_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Tr}(A)$ ,
4.  $a_{n-k} = (-1)^{n-k} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \det(A_I)$ ,

pour  $1 \leq k \leq n$ , et où  $A_I$  est la sous-matrice obtenue en extrayant les lignes et les colonnes de  $A$  d'indice dans  $I$ .

*Indication pour la question 4 :* écrire, pour une permutation  $\sigma \in S_n$ ,

$$\prod_{i=1}^n (A - zI)_{i, \sigma(i)} = \prod_{i=1}^n (A_{i, \sigma(i)} - z\delta_{i, \sigma(i)}) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \prod_{i \in I} A_{i, \sigma(i)} \prod_{j \notin I} (-z\delta_{j, \sigma(j)}).$$

**Exercice 8.** Soit  $K$  un corps et  $A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times m}$  avec  $m \leq n$ . On pose  $p_M$  le polynôme caractéristique d'une matrice  $M$ .

1. Montrer que  $\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ .
2. En déduire que  $p_{BA}(\lambda) = (-1)^{n-m} \lambda^{n-m} p_{AB}(\lambda)$  et donc que les valeurs propres de  $BA$  sont exactement les valeurs propres de  $AB$  (avec multiplicités égales) avec  $n - m$  zéros en plus.
3. En comparant les coefficients de  $\lambda^{n-m}$ , et à l'aide de l'exercice 8, en déduire la *formule de Cauchy-Binet*

$$\det(AB) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=m}} \det(A_{[m], I}) \det(B_{I, [m]}).$$

**Exercice 9.** Soit  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$  des vecteurs unitaires et deux à deux orthogonaux par rapport au produit scalaire standard.

Posons  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  la matrice dont les colonnes sont les  $\{a_i\}_{i=1}^m$ , et  $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Im}(A)$  la projection orthogonale sur l'espace  $\text{span}(\{a_i\}_{i=1}^m)$ . Par définition,

$$\Pi(v) = \arg \min_{u \in \text{Im}(A)} \|u - v\|.$$

1. Montrer que  $m \leq n$  à l'aide de l'exercice 4 de la série 6.
2. Montrer que  $\Pi(v) = \sum_{i=1}^m \langle v, a_i \rangle a_i$  à l'aide de l'exercice 5 de la série 6. En déduire que  $\Pi$  est une application linéaire :  $\Pi(v) = Mv$  dans la base canonique pour une certaine matrice  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de rang  $m$ .
3. Montrer que  $M = AA^T$ .

**Exercice 10.** On considère cette fois-ci une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  dont les colonnes sont supposées linéairement indépendantes. On considère à nouveau le cas du produit scalaire standard.

1. Montrer que  $\ker(A^T A) = \{0\}$  et donc que  $A^T A$  est inversible.

Soit  $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Im}(A)$  la projection orthogonale sur  $\text{Im}(A)$ , et soit  $A = A^* R$  la décomposition QR de  $A$  (corollaire 5.9 des notes du cours).

2. Montrer que  $R$  est inversible et donc que  $\Pi$  coïncide avec la projection orthogonale sur  $\text{Im}(A^*)$ . Déduire de l'exercice précédent que  $\Pi = A^*(A^*)^T$ .
3. Montrer que  $A^T A = R^T R$ .
4. Conclure que  $\Pi = A(A^T A)^{-1} A^T$ .

**Exercice 11.** Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire standard dans  $\mathbb{R}^n$ . Trouver une factorisation  $A = A^*R$  du corollaire 5.9 des matrices suivantes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}.$$

**Exercice 12. (\*)** Le but de cet exercice est de montrer l'*inégalité d'Hadamard*, c'est-à-dire

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \|a_i\|_2,$$

pour  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dont les colonnes sont  $a_1, \dots, a_n$ .

Soit  $A'$  la matrice dont les colonnes sont  $a_1^*, \dots, a_n^*$ , les vecteurs *non-normalisés* issus de l'orthogonalisation de Gram-Schmidt sur les colonnes de  $A$ . On rappelle la décomposition  $A = A'S$ , où  $S$  est triangulaire supérieure de diagonale 1.

1. Montrer que  $\det(S) = 1$  et que  $\det(A) = \det(A') = \pm \prod_{i=1}^n \|a_i^*\|_2$ .
2. Montrer que  $\|a_i^*\| \leq \|a_i\| \forall i = 1, \dots, n$ , et conclure.

Supposons de surcroît que les coefficients de  $A$  soient tous bornés absolument par  $M \in \mathbb{R}_+ : |A_{ij}| \leq M \forall i, j$ . Dédurre de l'inégalité d'Hadamard que  $|\det(A)| \leq M^n n^{n/2}$ .