EPFL - Printemps 2025	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 7	

Exercice 1. (a) Soit A un anneau intègre. Si $a_1, \ldots, a_n \in A$ sont des racines distinctes de $f(x) \in A[x]$, montrer que $\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$ divise $f(x)$.

(b) Soient p et q deux nombres premiers distincts dans $\mathbb{Z}$. Montrer que le polynôme $t^2 - t$ de $(\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z})[t]$ possède quatre racines distinctes $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$, mais que $(t - a_1)(t - a_2)(t - a_3)(t - a_4)$ ne divise pas $t^2 - t$.

(c) Soient $f, g \in \mathbb{Z}[t]$ des polynômes primitifs. Montrer que si f divise g dans $\mathbb{Q}[t]$, alors f divise g dans $\mathbb{Z}[t]$.

(d) Décomposer les polynômes $t^4 + 1$ et $t^8 - 1$ en facteurs irréductibles dans les anneaux $\mathbb{C}[t]$, $\mathbb{R}[t]$, $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{Z}[t]$, $\mathbb{F}_2[t]$ et $\mathbb{F}_7[t]$.

Exercice 2 (Polynômes irréductibles I). (a) Montrer que $\frac{2}{9}x^5 + \frac{5}{3}x^4 + x^3 + \frac{1}{3}$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Montrer que $x^4 + [2]_5$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_5[x]$ et conclure que $x^4 + 15x^3 + 7$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x]$.

(c) Montrer que $x^2 + y^2 + 1$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[x, y]$.

(d) Montrer que $x^2 + y^2 + [1]_2$ n'est pas un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_2[x, y]$.

(e) Montrer que $y^4 + x^3 + x^2y^2 + xy + 2x^2 - x + 1$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x, y]$.

(f) Montrer que $4x^3 + 120x^2 + 8x - 12$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x]$.

(g) Montrer que $t^6 + t^3 + 1$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[t]$.

(h) Montrer que $y^4 + xy^3 + xy^2 + x^2y + 3x^2 - 2x$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x, y]$.

Exercice 3 (Polynômes irréductibles II).
Soit $f(t) = t^4 + 4t^3 + 3t^2 + 7t - 4$ dans $\mathbb{Z}[t]$.

(a) Montrer que $\pi_2(f)$, la réduction modulo 2, n'est pas irréductible.

(b) Montrer que $\pi_3(f)$, la réduction modulo 3, n'est pas irréductible.

(c) Utiliser les décompositions des parties précédentes pour conclure néanmoins que f est irréductible.

Exercice 4.
Soit K un corps et L une extension quadratique, i.e. $[L : K] = 2$.

1. Montrez que toute extension de K de degré 1 est égale à K.
2. Montrez qu'il existe un élément $\alpha \in L$ tel que $L = K(\alpha)$.
3. Soit K de caractéristique différente de 2. Montrez qu'il existe un élément $\delta \in L$ avec $\delta^2 = d \in K$ tel que $L = K(\delta) = K(\sqrt{d})$.
4. Soit M une extension de K et $\delta \in M \setminus K$ un élément avec $\delta^2 \in K$. Montrez que $K(\delta)$ est une extension quadratique de K.

Exercice 5.
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Quand est-ce que les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{b})$ sont isomorphes en tant que $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels?
2. Quand est-ce que les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{b})$ sont isomorphes en tant que corps?

Exercice 6.

1. Soit L une extension de K avec $[L : K]$ impair. Montrer que $K(\alpha) = K(\alpha^2)$ pour tout $\alpha \in L \setminus K$.
2. Soient $p, q \in \mathbb{Z}$ deux nombres premiers distincts. Montrez que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{q})$ et $\sqrt{q} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Calculez $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbb{Q}]$.
3. Soit L une extension de K et soient $\alpha, \beta \in L$ des éléments tels que $[K(\alpha) : K] = m$ et $[K(\beta) : K] = n$ sont premiers entre eux. Montrer que $[K(\alpha, \beta) : K] = mn$.