Série 23

Pour le 26 mars 2025

Exercice 1

Calcule les primitives des fonctions suivantes en intégrant par parties :

a) $f(x) = x \cdot \cos(x)$

b) $f(x) = x \cdot e^x$;

c) $f(x) = \ln(x)$

d) $g(x) = x^2 e^{2x}$;

e) $f(x) = (3x^2 - 4)\cos(x)$

f) $g(x) = \cos(x) \cdot e^x$;

g) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

h) $g(x) = \sin^2(x)$.

Exercice 2

Intégration par parties.

Calcule les intégrales définies

a) $\displaystyle\int_1^2 (x^2 + 1)\ln(x)\,dx$;

b) $\displaystyle\int_1^2 \ln^2(x)\,dx$;

c) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,dx$.

Exercice 3

Intégration par changement de variables.
Calcule les intégrales définies suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \cos^5(x)\sin(x)\,dx\,;$

Indication. Effectue le changement de variables $\cos(x) = u$.

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x\,(4-x)}}\,dx\,;$

Indication. Effectue le changement de variables $x = t + 2$, puis $t = 2\sin(s)$.

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx\,;$

Indication. Effectue le changement de variables $u = x^3 + 1$.

d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\cos(x)}{1+2\sin(x)}\,dx\,;$

Indication. Effectue le changement de variables $t = \sin(x)$.

Exercice 4

Intégration de fonctions trigonométriques.
Calcule les intégrales définies suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)+\tan^2(x)}\,dx\,;$

Indication. Développe le terme $\tan^2 x$ et reconnais une dérivée d'une composition.

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(2x)\,dx\,;$

Indication. Démontre que $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$ à l'aide de la formule de duplication des angles et utilise-la !

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2\sin^2(x)\,dx$

Indication. Utilise la formule démontrée au b).

Exercice 5

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx\,;$

b) $\displaystyle\int_a^b f(\cos x)\sin x\,dx = -\int_{\cos a}^{\cos b} f(t)dt\,;$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\cos x)\sin x\,dx = 0$ pour toute fonction continue f ;

d) Soit f une fonction périodique de période T. Alors $\displaystyle\int_0^{2T} f(x)dx = 0\,;$

e) L'aire de la surface comprise entre l'axe Ox pour $-\infty < x \leq b$ et le graphe de la fonction e^x vaut e^b.

f) L'aire de la surface comprise entre l'axe Ox pour $\pi/2 < x \leq \pi$ et le graphe de la fonction $\tan x$ vaut $\ln 1 = 0$.

g) Une primitive de $\sinh x$ est $\cosh x$ et une primitive de $\cosh x$ est $\sinh x$.

Exercice 6

On cherche l'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{3}x^2 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$.

a) Trouve une primitive de la fonction $\sqrt{3}\,x^2$.

b) Trouve une primitive de la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ $\left(\text{en utilisant que } \arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

c) Montre que $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 4\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx - \int \sqrt{4-x^2}\,dx.$

d) Trouve une primitive de $\sqrt{4-x^2}$ en intégrant par parties et en utilisant les parties précédentes.

e) Calcule finalement l'aire de la surface D et effectue un dessin de la situation.

Exercices théoriques

Exercice 7

Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit $a < b$ et $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Démontre que

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\, dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)$$

en suivant la marche à suivre proposée.

a) Montre que l'inégalité est vérifiée lorsque f est la fonction constante nulle ($f(x) = 0$ pour tout x).

b) On suppose que f n'est pas la fonction nulle. Soit λ un nombre réel. Développe l'intégrale

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 dx$$

pour obtenir un polynôme $p(\lambda)$ de degré 2.

c) Montre que le discriminant Δ de $p(\lambda)$ est négatif ou nul.

d) Calcule ce discriminant et déduis de la partie précédente que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.

Exercice 8

Trouve les primitives des fonctions $\cosh(x)$, $\sinh(x)$, $\tanh(x)$ et $\coth(x)$ en utilisant ce que tu sais des primitives et des dérivées de l'exponentielle.