Série 26

Exercice 1. Détermine le domaine de définition, les asymptotes et la parité des fonctions f, g, h et i données comme suit.

a) $f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}$;

b) $g(x) = \sqrt{4x^2 + 3} - \sqrt{(4x + 1)(x + 4)}$;

c) $h(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$;

d) $i(x) = x\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

Exercice 2. On considère une fonction $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Donne l'ensemble de définition de f.

b) Montre que f se comporte asymptotiquement comme g donnée par $g(x) = \left|\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right|$.

c) Détermine la position de $f(x)$ par rapport à ses asymptotes et propose une esquisse de f dans chacun des cas que tu traites.

Remarque. Cet exercice permet d'avoir une meilleure intuition pour le comportement des fonctions du type de l'exercice précédent.

Exercice 3. Utilise le théorème des 2 gendarmes pour trouver les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

b) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \left(\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor\right)$

Exercice 4.

a) Soit $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$ une fonction rationnelle (avec $a_n \neq 0 \neq b_m$). Démontre (enfin !) que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m, \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m, \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \cdot \infty & \text{si } n > m, \end{cases}$$

(où $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction "signe" qui envoie x sur -1 si $x < 0$, 0 si $x = 0$, et 1 si $x > 0$).
Comment ce résultat change-t-il lorsque x tend vers $-\infty$?

b) Lors de l'étude des fonctions rationnelles, nous avons vu qu'une telle fonction donnée par $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ possède une asymptote oblique $y = px + o$ (avec $p, o \in \mathbb{R}$) si le quotient de la division polynomiale de $a(x)$ par $b(x)$ est $q(x) = px + o$. Démontre que cette définition "au sens des fonctions rationnelles" correspond bien à la définition d'asymptote oblique (donnée au cours sous forme d'une limite).

Exercice 5. On désire calculer

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right)$$

qui, sous cette forme, donne l'expression indéterminée "$\infty \cdot 0$".

a) Montre que $\cos(t) \leq \frac{\sin(t)}{t} \leq 1$ si $t \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Déduis-en que $\frac{\cos(t)-1}{t} \geq \frac{1}{t}\left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) \geq 0$ si $t \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$, et
$\frac{\cos(t)-1}{t} \leq \frac{1}{t}\left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) \leq 0$ si $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

c) En t'aidant d'une amplification adéquate, donne la valeur de la limite cherchée.

Exercice 6. Détermine le domaine de définition, les coordonnées d'éventuels "trous", les asymptotes, ainsi que la parité de chacune des fonctions a à d données comme suit.

a) $a(x) = x + \frac{\sin(x)}{x}$;

b) $b(x) = x + \sin(x)$;

c) $c(x) = 10x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$;

d) $d(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.