Peter Wittwer
28 mars 2025

Analyse avancée II – Corrigé de la série 6B

Échauffement. (Produits scalaires et normes induites)

i) Par la positivité du produit scalaire on a $\forall u \in V$, $\|u\| \geq 0$, et $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

ii) Par la bi-linéarité du produit scalaire on a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = \langle \lambda u, \lambda u \rangle^{1/2} = \sqrt{\lambda^2}\, \langle u, u \rangle^{1/2} = |\lambda| \|u\|$.

iii) Par la symétrie du produit scalaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir Exercice 1) on a $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\left|\langle u, v\rangle\right| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = \big(|u\| + \|v\|\big)^2$ et donc $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Exercice 1. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$,

$$0 \leq \langle \alpha u + v, \alpha u + v \rangle = \alpha^2 \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\alpha \langle u, v \rangle \equiv p(\alpha)$$

De $p(\alpha) \geq 0$ on déduit avec $\|u\|^2 \geq 0$ que le discriminant de l'équation quadratique $p(\alpha) = 0$ doit être négatif ou zéro :

$$\langle u, v \rangle^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0,$$

car sinon on a deux solutions réelles avec des valeurs négatives de $p(\alpha)$ entre ces deux racines. On a donc bien l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 2. (Espaces métriques)
Soient $(u, v, w) \in V^3$.

i) (symétrie) $d(u, v) = d(u, v)$ car $\|u - v\| = \|v - u\|$.

ii) (séparation) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow \|u - v\| = 0 \Leftrightarrow u = v$.

iii) (inégalité triangulaire) Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{1+x}$. La fonction f est croissante, car

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0,$$

et donc, puisque $\|u - v\| \leq \|u - w\| + \|w - v\|$,

$$f\left(\|u - v\|\right) \leq f\left(\|u - w\| + \|w - v\|\right).$$

De plus on a, pour $x, y \geq 0$,

$$f(x+y) = \frac{x+y}{1+x+y} = \frac{x}{1+x+y} + \frac{y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} = f(x) + f(y),$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} d(u, v) = f\left(\|u - v\|\right) &\leq f\left(\|u - w\| + \|w - v\|\right) \\ &\leq f\left(\|u - w\|\right) + f\left(\|w - v\|\right) = d(u, w) + d(w, v). \end{aligned}$$

Les points *i)* - *iii)* montrent que d est une distance sur V.

Remarque : *on peut aussi montrer le point iii) en observant que $f(0) = 0$ et que f est une fonction concave, c'est-à-dire que pour tout $0 \leq a \leq b$ et $\lambda \in [0,1]$,*

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \geq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

En choisissant $a = 0$ on obtient que pour tout $b \geq 0$ et $\lambda \in [0,1]$, $\lambda f(b) \leq f(\lambda b)$, et par conséquence que pour tout $x, y \geq 0$,

$$\frac{x}{x+y} f(x+y) \leq f(x)$$
$$\frac{y}{x+y} f(x+y) \leq f(y)$$

et donc en sommant les deux inégalités que $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. .

Exercice 3. *(Sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$)*
Nous basons ici les arguments sur le concept des ensembles ouverts.

i) $\mathring{X} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 > 1\big\}$. *En effet, le point $(0,0)$ est par définition un point isolé de X, et donc $(0,0) \notin \mathring{X}$. De plus, l'ensemble $\mathring{X}$ indiqué est un ensemble ouvert, car si $(x_0, y_0) \in \mathring{X}$, alors la boule ouverte $B \equiv B\big((x_0,y_0), \delta\big)$, où $\delta = \big\|(x_0,y_0)\big\| - 1$, satisfait $B \subset \mathring{X}$, car, pour $(x,y) \in B$ on a :*

$$\big\|(x,y)\big\| \geq \big\|(x_0,y_0)\big\| - \big\|(x-x_0, y-y_0)\big\| > \big\|(x_0,y_0)\big\| - \delta = 1.$$

L'ensemble $\mathring{X}$ indiqué est donc bien le plus grand sous-ensemble ouvert de X.

ii) $\overline{X} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \geq 1\big\} \cup \big\{(0,0)\big\}$. *En effet, le complémentaire de X est l'ensemble $X^c = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 1\big\} \setminus \big\{(0,0)\big\}$ et avec les mêmes arguments que sous i) on se convainc que l'intérieur de X^c est l'ensemble $\mathring{X^c} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 < 1\big\} \setminus \big\{(0,0)\big\}$. Finalement on utilise que $\overline{X} = \Big(\mathring{X^c}\Big)^c$.*

iii) $\partial X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 = 1\big\} \cup \big\{(0,0)\big\}$, *car $\partial X = \overline{X} \setminus \mathring{X}$.*

iv) *L'ensemble des points isolés est $\big\{(0,0)\big\}$ (lire la définition correspondante du cours).*

v) *L'ensemble des points d'accumulation est $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \geq 1\big\} = \overline{X} \setminus \big\{(0,0)\big\}$.*

Exercice 4. *(Sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$)*

i) *L'ensemble $\Omega_1 = \big\{(x_1,x_2) : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 16\big\}$ est une couronne (sans les bords) centrée à l'origine, et cet ensemble est ouvert : soit $x \in \Omega_1$ et*

$$\delta = \min\big\{\|x\| - 1\,,\, 4 - \|x\|\,\big\}\,,$$

alors $B \equiv B\,(x, \delta) \subset \Omega_1$. Ceci se montre de la manière suivante. Soit $y \in B$, alors par définition de δ on a à la fois $\|x-y\| < \|x\| - 1$ et $\|x-y\| < 4 - \|x\|$. On a donc à la fois

$$\|y\| \leq \|x\| + \|x-y\| < \|x\| + (4 - \|x\|) = 4$$

et

$$\|y\| \geq \|x\| - \|x-y\| > \|x\| - (\|x\|-1) = 1.$$

On a donc bien que $y \in \Omega_1$.

D'autre part, Ω_1 *est borné, car* $\forall x \in \Omega_1,\ \|x\| < 4$ *et donc* $\Omega_1 \subset \overline{B\,(0,4)}$. *Le bord de* Ω_1 *est donné par*

$$\partial\Omega_1 = \left\{(x_1,x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\right\} \cup \left\{(x_1,x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 16\right\}.$$

En effet si $x \in \partial\Omega_1$ *on vérifie aisément que quelque soit* $\delta > 0$, $B(x,\delta) \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ *et que* $B(x,\delta) \cap \Omega_1^c \neq \emptyset$.

ii) Soit $\Omega_2 = \left\{(x_1,x_2) : x_1^2 - x_2^2 = 1\right\}$. *Cet ensemble consiste de deux branches d'hyperbole. Il s'agit d'un ensemble fermé, car on a que* $\Omega_2^c = \left\{(x_1,x_2) : x_1^2 - x_2^2 \neq 1\right\}$ *qui est un ensemble ouvert. Pour s'en convaincre on considère un point* $z \in \Omega_2^c$ *et on montre qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que* $B\,(z,\delta) \subset \Omega_2^c$. *Pour ce faire, supposons qu'il existe* $\zeta > 0$ *(la démarche est analogue si on suppose* $\zeta < 0$*) tel que*

$$z_1^2 - z_2^2 - 1 = \zeta.$$

et choisissons

$$\delta = \min\left\{\frac{\zeta}{8(|z_1|+|z_2|)}, \sqrt{\frac{\zeta}{4}}\right\}$$

alors tout point $(w_1,w_2) \in B\,(z,\delta)$ *s'écrit*

$$w_1 = z_1 + \delta_1 \quad \textit{et} \quad w_2 = z_2 + \delta_2, \quad \textit{avec} \ \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} < \delta,$$

et vérifie

$$\begin{aligned} w_1^2 - w_2^2 - 1 &= z_1^2 - z_2^2 - 1 + 2\delta_1 z_1 - 2\delta_2 z_2 + \delta_1^2 - \delta_2^2 \\ &> \zeta - \left(2\delta\,(|z_1|+|z_2|) + \delta^2\right) \geq \frac{\zeta}{2} > 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que $B\,(z,\delta) \subset \Omega_2^c$ *(faire une déssin!). On vérifie aussi sans difficulté que le bord de* Ω_2 *est*Ω_2 *lui-même et que* Ω_2 *est un ensmble non borné.*

<u>*Remarques :*</u>

(a) *L'équation* $z_1^2 - z_2^2 - 1 = \zeta > 0$ *exprime le fait que le point* (z_1,z_2) *se trouve sur une hyperbole à droite de l'hyperbole* $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$.

(b) *L'inéquation* $w_1^2 - w_2^2 - 1 \geq \dfrac{\zeta}{2} > 0$ *exprime le fait que le point* (w_1,w_2) *se trouve à droite d'une hyperbole qui se trouve aussi à droite de l'hyperbole* $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$.

(c) *Pour comprendre le choix de* δ *il suffit de suivre le calcul concernant le point* (w_1,w_2). *Pour obtenir l'inégalité*

$$\zeta - \left(2\delta\,(|z_1|+|z_2|) + \delta^2\right) \geq \frac{\zeta}{2}$$

on demande que à la fois $2\delta\,(|z_1|+|z_2|) \leq \dfrac{\zeta}{4}$ *ainsi que* $\delta^2 \leq \dfrac{\zeta}{4}$, *ce qui est justement le cas avec le* δ *qui a été choisi.*

iii) *Soit* $\Omega_3 = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1,\ \sin\big(\frac{1}{x_1}\big) < x_2 < 2\}$. *Il s'agit d'un ensemble ouvert : soit* $x = (x_1, x_2) \in \Omega_3$. *Cherchons* $\delta_1 > 0$ *et* $\delta_2 > 0$ *de sorte que* $]x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1[\times]x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2[\subset \Omega_3$. *Posons* $\delta_2 = \frac{1}{2}\big(x_2 - \sin\big(\frac{1}{x_1}\big)\big) > 0$. *Par continuité de la fonction* $x \mapsto \sin\big(\frac{1}{x}\big)$ *sur* $]0, 1[$, *il existe* $\delta_1 > 0$ *tel que* $0 < y_1 < 1$ *et* $|y_1 - x_1| < \delta_1$ *impliquent*

$$\left|\sin\big(\tfrac{1}{x_1}\big) - \sin\big(\tfrac{1}{y_1}\big)\right| < \delta_2.$$

Finalement, si $(y_1, y_2) \in\ ]x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1[\ \times\ ]x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2[$, *alors*

$$\sin\big(\tfrac{1}{y_1}\big) < \sin\big(\tfrac{1}{x_1}\big) + \delta_2 = \tfrac{1}{2}\Big(\sin\big(\tfrac{1}{x_1}\big) + x_2\Big) = x_2 - \delta_2 < y_2.$$

Il suffit maintenant de réduire δ_1 *de sorte que* $]x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1[\ \subset\ ]0, 1[$ *et* δ_2 *de sorte que* $x_2 + \delta_2 < 2$. *Cela montre que* $B\big(x, \min(\delta_1, \delta_2)\big) \subset \Omega_3$ *(il est vivement conseillé d'agrémenter cet argument d'un dessin).*

L'ensemble Ω_3 *est borné car* $\forall x \in \Omega_3,\ \|x\| \leq \sqrt{5}$. *Finalement, le bord de* Ω_3 *est donné par*

$$\begin{aligned}&\{(x_1, x_2) : 0 < x_1 \leq 1, x_2 = \sin\big(\tfrac{1}{x_1}\big)\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, -1 \leq x_2 \leq 2\}\\ &\quad \cup \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 2\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 1, \sin(1) \leq x_2 \leq 2\}.\end{aligned}$$

Montrons seulement que $\{(x_1, x_2) : x_1 = 0, -1 \leq x_2 \leq 2\} \subset \partial\Omega$ *où* $\partial\Omega$ *est le bord de* Ω. *En effet si* $x_1 = 0$ *et* $-1 \leq x_2 \leq 2$ *et si* $0 < \delta < 1$, *il existe* $0 < \varepsilon < \delta$ *tel que* $\sin\big(\frac{1}{\varepsilon}\big) = -1$. *Ainsi* $B\Big(x, \frac{1}{\sqrt{2}}\delta\Big) \cap \Omega_3 \neq \emptyset$. *D'autre part* $B\Big(x, \frac{1}{\sqrt{2}}\delta\Big) \cap \Omega_3^c \neq \emptyset$.

iv) $\Omega_4 = \{(x_1, x_2) : (x_1 \in \mathbb{Q},\ 0 < x_1 < 1,\ 1 < x_2 < 5) \vee (x_1 \notin \mathbb{Q},\ 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 5)\}$. Ω_4 *n'est ni ouvert, ni fermé. En effet,*

(a) *Soit* $x_1 \in]0, 1[$, $x_1 \notin \mathbb{Q}$, *et* $x_2 \in]0, 1[$. *Si* $x = (x_1, x_2)$ *on a* $x \in \Omega_4$ *et quelque soit* $\delta > 0$, $B(x, \delta) \cap \Omega_4^c \neq \emptyset$. *Ainsi* $x \in \partial\Omega_4$, *ce qui montre que* Ω_4 *n'est pas ouvert.*

(b) *Soit maintenant* $x_1 \in]0, 1[$, $x_1 \in \mathbb{Q}$, *et* $x_2 \in]0, 1[$. *Alors* $x \notin \Omega_4$ *et quelque soit* $\delta > 0$ *on a* $B(x, \delta) \cap \Omega_4 \neq \emptyset$, *ce qui prouve que* Ω_4^c *n'est pas ouvert et par conséquence* Ω_4 *n'est pas fermé.*

De plus Ω_4 *est borné car si* $x \in \Omega_4$, $\|x\| \leq 5\sqrt{2}$. *Le bord de* Ω_4 *est donné par*

$$\begin{aligned}\partial\Omega_4 =&\{(x_1, x_2) : x_1 = 0, 1 \leq x_2 \leq 5\}\\ &\cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 1, 1 \leq x_2 \leq 5\}\\ &\cup \{(x_1, x_2) : x_2 = 5, 0 \leq x_1 \leq 1\}\\ &\cup \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}.\end{aligned}$$

En effet, pour tout point $x \in [0, 1] \times [0, 1]$ *et pour tout* $\delta > 0$, *le disque* $B(x, \delta)$ *contient des points de* Ω_4 *et des points de* Ω_4^c. *Les trois autres contributions sont triviales.*

v) $\Omega_5 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \cup \{(x_1, x_2) : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}$. Ω_5 *est la réunion d'une disque ouvert* C_1, *centré en* $(0, 0)$ *de rayon* 1, *et d'un disque fermé* C_2, *centré en* $(1, 1)$ *de rayon* 1. *Il s'agit d'un ensemble ni ouvert ni fermé : le point* $\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$ *est sur le bord de* Ω_5 *mais n'appartient pas à* Ω_5 *et le point* $\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$ *n'est pas un* *point dans* $\mathring{\Omega}_5$. Ω_5 *est borné, car contenu dans la boule centrée au point* $(0,0)$ *et de rayon* 25. *Le bord de* Ω_5 *est donné par*

$$\begin{aligned}\partial\Omega_5 =& \{(x_1,x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1x_2 \leq 0\} \\ & \cup \{(x_1,x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\} \\ & \cup \{(x_1,x_2) : (1-x_1)^2 + (1-x_2)^2 = 1, x_1 \geq 1\} \\ & \cup \{(x_1,x_2) : (1-x_1)^2 + (1-x_2)^2 = 1, x_2 \geq 1\}.\end{aligned}$$