

Analyse avancée II – Série 6B

Échauffement. (Produits scalaires et normes induites)

Un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur un espace vectoriel réel V est une fonction de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$, qui satisfait :

- i) (*symétrie*) $\forall u, v \in V, \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
- ii) (*bi-linéarité*) $\forall u, v, w \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$.
- iii) (*positivité*) $\forall u \in V, \langle u, u \rangle \geq 0$ et $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Montrer que la fonction $\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \|u\| := \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$ définit une norme sur V . Cette norme est appelée la norme induite par le produit scalaire.

Exercice 1. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit V un espace vectoriel, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme induite. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.

Exercice 2. (Espaces métriques)

Soit V un espace vectoriel et $\| \cdot \|$ une norme sur V . Montrer que la fonction $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto d(u, v) := \frac{\|u - v\|}{1 + \|u - v\|}$, définit une distance sur V .

Exercice 3. (Sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$)

Soit $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 > 1\} \cup \{(0, 0)\}$. Donner explicitement les ensembles suivants : $\overset{\circ}{X}$, $\overline{X}$, ∂X , l'ensemble des points isolés de X et l'ensemble des points d'accumulation de X . Justifier vos réponses à partir des définitions.

Exercice 4. (Sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$)

Soient les ensembles suivants :

$$\Omega_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: 1 < x_1^2 + x_2^2 < 16\},$$

$$\Omega_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1^2 - x_2^2 = 1\},$$

$$\Omega_3 := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: 0 < x_1 < 1, \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) < x_2 < 2 \right\},$$

$$\Omega_4 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: (x_1 \in \mathbb{Q}, 0 < x_1 < 1, 1 < x_2 < 5) \vee (x_1 \notin \mathbb{Q}, 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 5)\},$$

$$\Omega_5 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1^2 + x_2^2 < 1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 \leq 1\}.$$

Pour chacun des ensembles décider s'il est ouvert ou fermé ou ni ouvert ni fermé, s'il est borné ou non, et déterminer le bord. Justifier les réponses à partir des définitions.