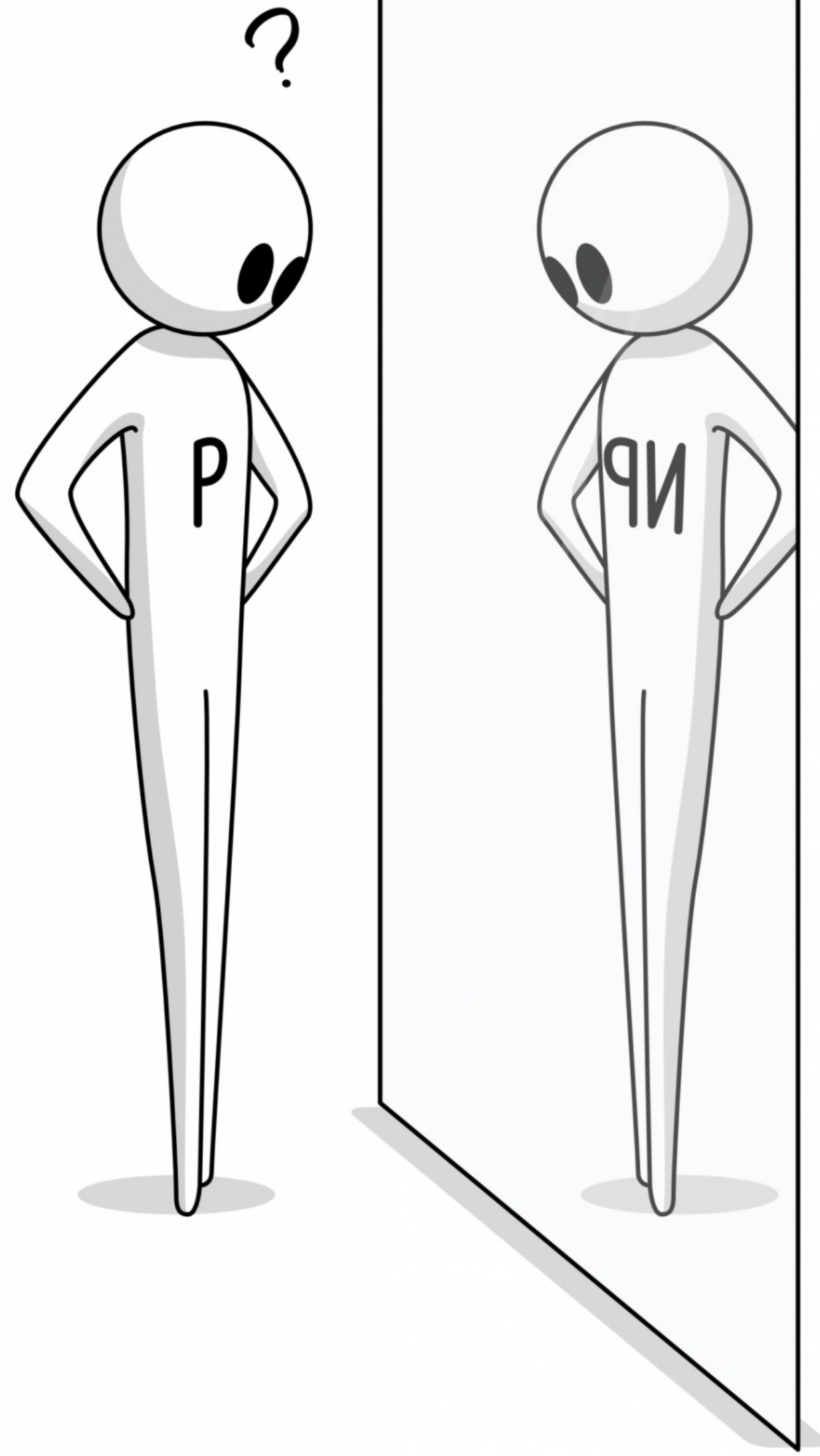


EPFL Quelques rappels

- **complexité temporelle d'un algorithme** = nombre d'opérations élémentaires effectuées par celui-ci, dans le pire des cas
- **problème** = ensemble de questions, solubles (ou non) par un algorithme (ensemble infini → problème intéressant!)

Aujourd'hui, nous allons nous intéresser
aux **classes de complexité des problèmes**.



Information, Calcul et Communication

Classes de complexité
des problèmes

Olivier Lévêque

Classes de complexité des problèmes

- **Première question** : Tout problème est-il soluble par un algorithme?

Réponse : non !

- **Deuxième question** : Les problèmes solubles le sont-ils tous en un temps raisonnable ?

Réponse : Encore non !

Classes de complexité des problèmes

- **Première question** : Tout problème est-il soluble par un algorithme?

Réponse : non !

- **Deuxième question** : Les problèmes solubles le sont-ils tous en un temps raisonnable ?

Réponse : Encore non !

Pour essayer d'identifier quels **problèmes** sont faciles à résoudre et quels problèmes le sont moins, on introduit des **classes de complexité**.

Définition

Soient $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions non-négatives

On dit que " $f(n)$ est un grand O de $g(n)$ " et on écrit " $f(n) = O(g(n))$ " s'il existe $C > 0$ et $N \geq 1$ tels que

$$f(n) \leq C g(n) \text{ pour tout } n \geq N$$

Exemples

- Si $f(n) \leq g(n)$ pour tout $n \geq 1$, alors $f(n) = O(g(n))$
- Si $f(n) = \Theta(g(n))$, alors $f(n) = O(g(n))$
- La fonction $f(n) = 3n + 1$ est un $O(n)$, est aussi un $O(n^2)$
- La fonction $f(n) = n^2 + 2n + 1$ est un $O(n^2)$, mais n'est pas un $O(n)$
- La fonction $\log_2(n)$ est un $O(n^p)$ pour tout $p > 0$
- La fonction n^p est un $O(2^n)$ pour tout $p > 0$

Deux classes de complexité importantes

Définitions

- La **classe P** est l'ensemble des **problèmes** qui peuvent être **résolus en temps polynomial**, i.e., *pour lesquels il existe un algorithme de résolution dont la complexité temporelle est un $O(n^p)$ pour des données d'entrée de taille n (avec $p \geq 1$ un nombre fixé).*
- La **classe NP** est l'ensemble des **problèmes** pour lesquels, *si "on" nous propose une solution du problème, il est alors possible de **vérifier en temps polynomial** si celle-ci en est une ou pas.*

Remarques

- NP ne veut **pas** dire "non-polynomial"

Deux classes de complexité importantes

Définitions

- La **classe P** est l'ensemble des **problèmes** qui peuvent être **résolus en temps polynomial**, i.e., *pour lesquels il existe un algorithme de résolution dont la complexité temporelle est un $O(n^p)$ pour des données d'entrée de taille n (avec $p \geq 1$ un nombre fixé).*
- La **classe NP** est l'ensemble des **problèmes** pour lesquels, *si "on" nous propose une solution du problème, il est alors possible de **vérifier en temps polynomial** si celle-ci en est une ou pas.*

Remarques

- NP ne veut **pas** dire "non-polynomial"
- $P \subset NP$ (il est plus facile de vérifier une solution que d'en proposer une !)

Exemples de problèmes appartenant à la classe P

Beaucoup de problèmes que nous avons déjà rencontrés dans ce cours appartiennent à la classe P (et sont donc des problèmes "faciles" à résoudre) :

- Le problème de la recherche d'un élément dans une liste de taille n .
- Le problème du tri d'une liste de taille n .
- Le calcul de la somme ou de la moyenne de n nombres.
- Identifier si tous les éléments d'une liste (de taille n) sont différents.

Tous ces problèmes admettent en effet des algorithmes de résolution de complexité temporelle $\Theta(n)$, $\Theta(n \cdot \log_2(n))$ ou $\Theta(n^2)$, donc $O(n^2)$.

Exemples de problèmes appartenant à la classe NP

- Tous les problèmes mentionnés avant, du fait qu'ils appartiennent à la classe P, appartiennent également à la classe NP !
- Voici maintenant un autre problème appartenant à la classe NP:

« Soient P, Q deux nombres premiers à n chiffres, et soit $N = P \cdot Q$.

Etant donné N , on aimerait retrouver P et Q . »

Exemple: si $N = 98'201$, que valent P et Q ?

- Ce problème n'est a priori pas facile à résoudre... Par contre, si on nous propose une solution (ici, $P = 347$ et $Q = 283$), il est alors facile de vérifier que $N = P \cdot Q$ en effectuant la multiplication (en $\Theta(n^2)$ opérations) : le problème appartient donc à la classe NP.

EPFL Exemples de problèmes

1. « Etant donnée une liste ordonnée L de n nombres entiers, existe-t-il **deux indices** différents $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $L(i) + L(j) = 0$? »

Exemple : $L = (-15, -12, -3, -1, +5, +17, +23) \rightarrow$ Réponse : non

Comme nous l'avons déjà vu, un algorithme de complexité temporelle $\Theta(n^2)$, ou même $\Theta(n)$, permet de répondre à cette question: le problème ci-dessus fait donc partie de la **classe P**.

EPFL Exemples de problèmes

2. « Etant donnée une liste ordonnée L de n nombres entiers, existe-t-il **trois indices** différents $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ tels que $L(i) + L(j) + L(k) = 0$? »

Exemple : $L = (-15, -12, -3, -1, +5, +17, +23) \rightarrow$ Réponse : encore non!

Un algorithme de complexité temporelle $\Theta(n^3)$ permet de répondre à cette question: le problème ci-dessus fait donc également partie de la **classe P**.

EPFL Exemples de problèmes

3. « Etant donnée une liste ordonnée L de n nombres entiers, existe-t-il un **sous-ensemble** $S \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $\sum_{i \in S} L(i) = 0$? »

Exemple : $L = (-15, -12, -3, -1, +5, +17, +23)$

Réponse : oui ! En effet : $-15 - 12 - 1 + 5 + 23 = 0$

ensemble $\{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow$ sous-ensemble $S \subset \{1, \dots, n\}$
 $\downarrow \downarrow \downarrow$
 $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ sous-ensembles $S \subset \{1, \dots, n\}$

3. « Etant donnée une liste ordonnée L de n nombres entiers, existe-t-il un **sous-ensemble** $S \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $\sum_{i \in S} L(i) = 0$? »

Exemple : $L = (-15, -12, -3, -1, +5, +17, +23)$

Réponse : oui ! En effet : $-15 - 12 - 1 + 5 + 23 = 0$

Mais pour obtenir cette réponse, on ne connaît pas d'autre algorithme que de tester tous les sous-ensembles S possibles, qui sont au nombre de 2^n .

Conclusion 1: On ne sait pas si ce problème fait partie de la **classe P**.

Par contre, si on nous propose une solution du problème, il est alors facile de **vérifier** en temps polynomial que c'en est bien une! (additionner n nombres ne nécessite que $\Theta(n)$ opérations).

Conclusion 2: Le problème ci-dessus fait partie de la **classe NP**.

Et pour finir, une question à un million de dollars !

- Le problème :

« Etant donnée une liste ordonnée L de n nombres entiers, existe-t-il un sous-ensemble $S \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $\sum_{i \in S} L(i) = 0$? »

s'appelle le **problème des sommes de sous-ensembles**. On peut montrer qu'il fait partie des problèmes **les plus difficiles** à résoudre parmi ceux de la classe NP.

= problèmes NP-complets

Et pour finir, une question à un million de dollars !

- Le problème :

« Etant donnée une liste ordonnée L de n nombres entiers, existe-t-il un sous-ensemble $S \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $\sum_{i \in S} L(i) = 0$? »

s'appelle le **problème des sommes de sous-ensembles**. On peut montrer qu'il fait partie des problèmes **les plus difficiles** à résoudre parmi ceux de la classe NP.

- Si on arrive à démontrer un jour que ce problème fait **aussi** partie de la classe P, ou au contraire qu'il n'en fait **pas** partie, on aura alors résolu la question de savoir si **P=NP** ou non, pour laquelle le Clay Mathematics Institute a promis une récompense d'une valeur d'un million de dollars.



Information, Calcul et Communication

Le problème du sac à dos

Exemple : former un comité

$$E = \underbrace{\{1 \dots n\}}_{\text{classe}}, \quad S \subset E \quad \underbrace{\text{comité}}$$

$$S = \{i\}$$

$$S = E$$

$$S = \{i, j, k, e\}$$

$$f(S) = \underline{\text{temps de décision}}$$

- Généralisation :

« Etant donnée une **fonction** f qui à tout sous-ensemble donné $S \subset \{1, \dots, n\}$ associe une valeur réelle $f(S)$, trouver un sous-ensemble $S \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $f(S)$ soit minimale. »

- Pour de nombreuses fonctions f , et donc pour de nombreux **problèmes d'optimisation discrète**, on ne sait *pas* s'ils appartiennent à la classe P, *ni* s'ils appartiennent à la classe NP.

= problème NP-difficile

- Généralisation :

« Etant donnée une **fonction** f qui à tout sous-ensemble donné $S \subset \{1, \dots, n\}$ associe une valeur réelle $f(S)$, trouver un sous-ensemble $S \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $f(S)$ soit minimale. »

- Pour de nombreuses fonctions f , et donc pour de nombreux **problèmes d'optimisation discrète**, on ne sait *pas* s'ils appartiennent à la classe P, *ni* s'ils appartiennent à la classe NP.
- Tous ces problèmes sont caractérisés par l'existence d'un **nombre fini, mais grand**, de solutions possibles.

EPFL Classes de complexité des problèmes : résumé

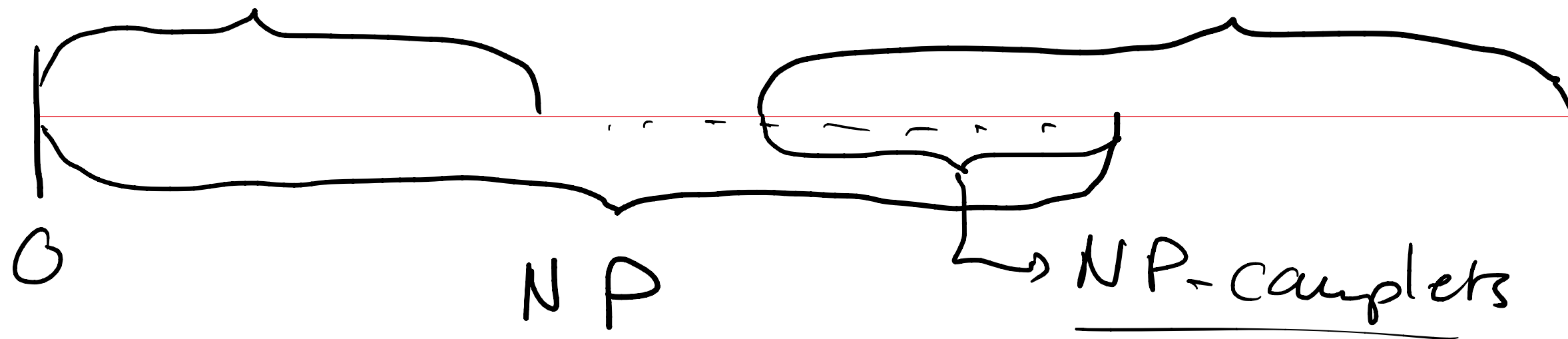
tri d'une liste
recherche d'un élément

P

NP-difficile

(pb de l'arrêt)

indécidables



factorisation
sommes de sous-ensembles

EPFL Le problème du sac à dos

- n objets, chacun pesant un certain poids
- un sac à dos de capacité maximale C
- Comment remplir au mieux le sac à dos?



Le problème du sac à dos

« Etant donnés une liste L de n nombres entiers positifs et $C > 0$, trouver un sous-ensemble $S \subset \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\sum_{i \in S} L(i) \leq C$$

et

$\sum_{i \in S} L(i)$ soit maximale. »

$$C = 13 \quad L = (5, 6, 4)$$

$$\text{choisir } S = \{1, 2\} \quad L(1) + L(2) = 11$$



Le problème du sac à dos

« Etant donnés une liste L de n nombres entiers positifs et $C > 0$, trouver un sous-ensemble $S \subset \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\sum_{i \in S} L(i) \leq C$$

et

$\sum_{i \in S} L(i)$ soit maximale. »

Hypothèses additionnelles:

- $L(i) \leq C$ pour toute valeur de i
- $\sum_{i=1}^n L(i) > C$



EPFL Le problème du sac à dos

= problème d'optimisation discrète (avec contrainte)

On ne sait pas s'il fait partie de la classe P, ni s'il fait partie de la classe NP.

Voici toutefois un algorithme polynomial en n qui remplit au moins la moitié du sac à dos :

1. Ordonner la liste L dans l'ordre décroissant
2. Chercher le nombre $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ tel que

$$\sum_{i=1}^k L(i) \leq C$$

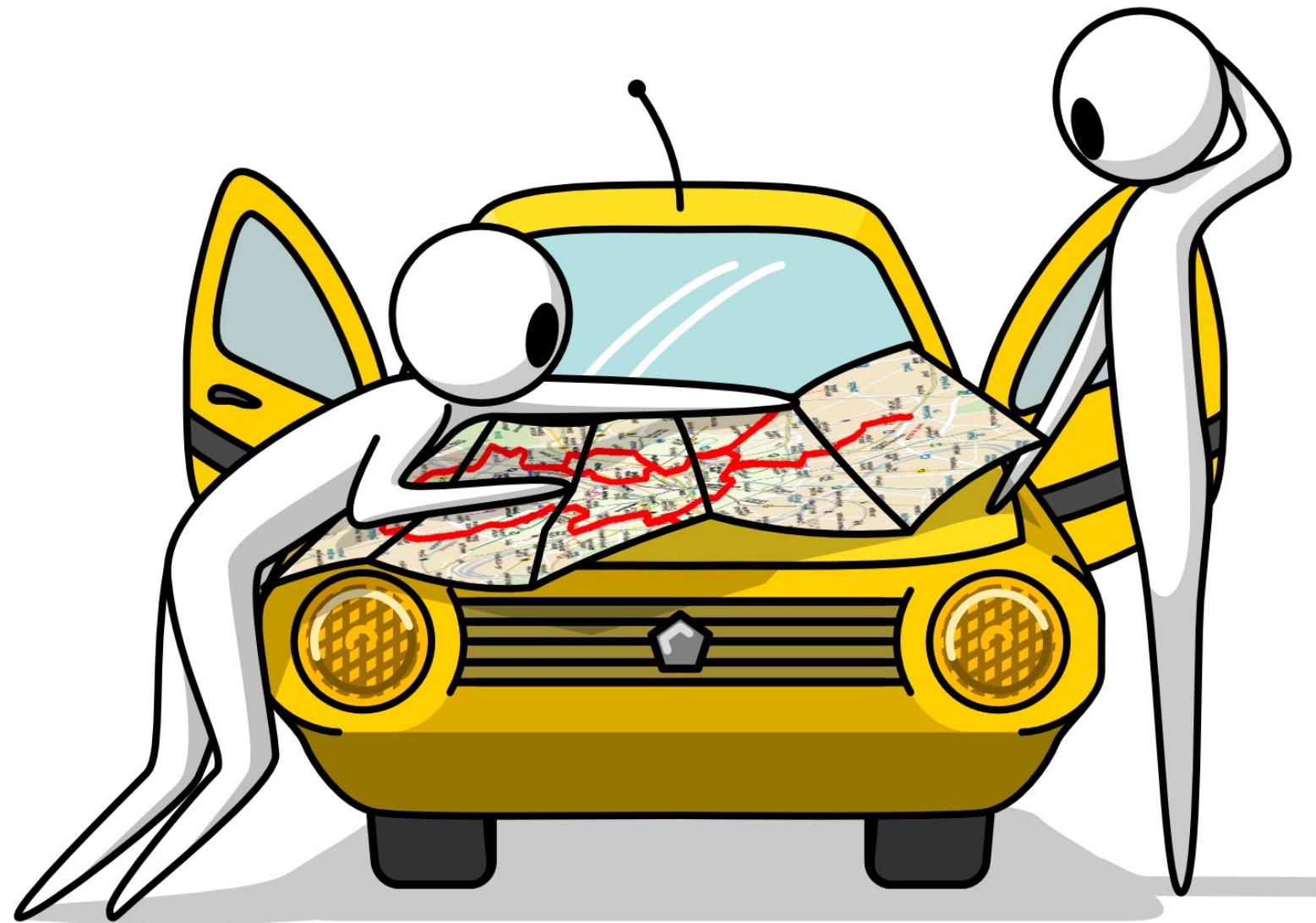
et

$$\sum_{i=1}^{k+1} L(i) > C$$

$$\begin{aligned} & \Theta(n \log_2 n) \\ & + \Theta(n) \\ & = \Theta(n \log_2 n) \end{aligned}$$

Affirmation : $\sum_{i=1}^k L(i) \geq \frac{C}{2}$ supposons le contraire : $\sum_{i=1}^k L(i) < \frac{C}{2}$

dans ce cas, $\sum_{i=1}^{k+1} L(i) = \sum_{i=1}^k L(i) + \underbrace{L(k+1)}_{\leq L(k) \leq \sum_{i=1}^k L(i)} \leq 2 \cdot \sum_{i=1}^k L(i) < C$ ↯



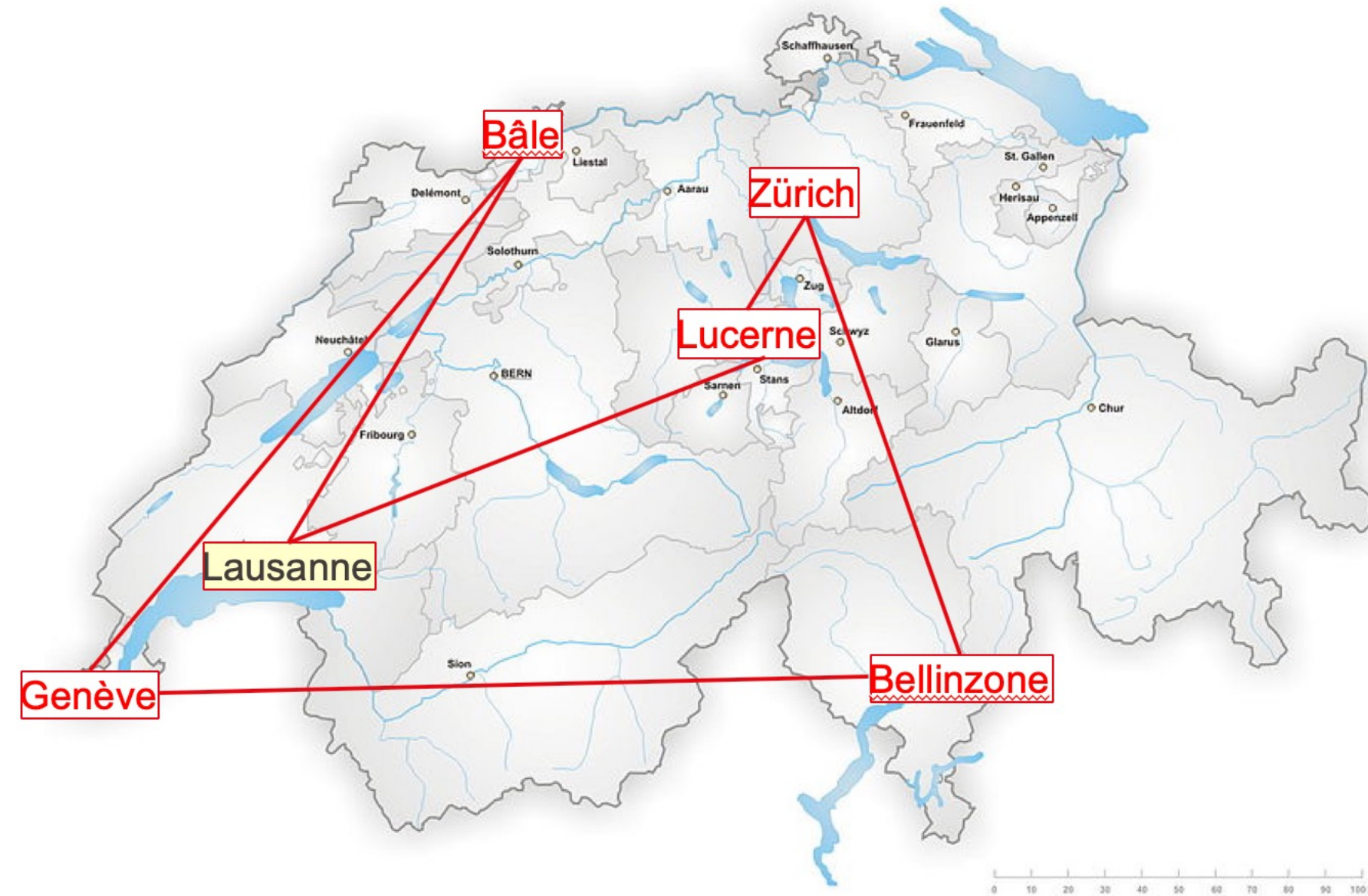
Information, Calcul et Communication

Le problème
du voyageur de commerce

Le problème du voyageur de commerce

Version « euclidienne »:

Etant donné un ensemble de n villes sur une carte, trouver le chemin fermé le plus court passant une et une seule fois par chacune de ces villes.



Note : On suppose ici des voyages à vol d'oiseau entre chaque ville.

EPFL Algorithmes de résolution

Premier essai :

Tester tous les chemins fermés possibles

→ Cet algorithme trouve le chemin fermé optimal ✓

... mais les chemins fermés sont au nombre de $n! = n(n-1)(n-2) \dots 1$
impossible à mettre en pratique !

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\gg 2^n}$$

Deuxième essai :

1. Partir d'une ville choisie au hasard
2. Tant qu'il reste une ville non-explorée, rejoindre la ville non-explorée la plus proche
3. Quand toutes les villes ont été explorées, revenir à la ville de départ

→ complexité temporelle polynomiale en n ✓

... mais le chemin fermé résultant est loin d'être optimal en général !

Troisième essai :

1. Choisir un **chemin fermé** ($v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1} = v_1$) au hasard
2. Effectuer une boucle pour i allant de 1 à n :
Permuter les villes v_i et v_{i+1} dans le chemin si cette permutation raccourcit la longueur totale du chemin

→ complexité temporelle polynomiale en n ✓

... meilleure performance moyenne que l'algorithme précédent,
mais résultat toujours aléatoire

Algorithme de résolution avec garantie d'approximation (et complexité temporelle polynomiale en n)

Théorème

Soit L_{min} la longueur du chemin fermé optimal (i.e., le plus court).
Il existe un algorithme de complexité temporelle polynomiale en n
permettant de trouver un chemin fermé de longueur $L \leq 2L_{min}$.

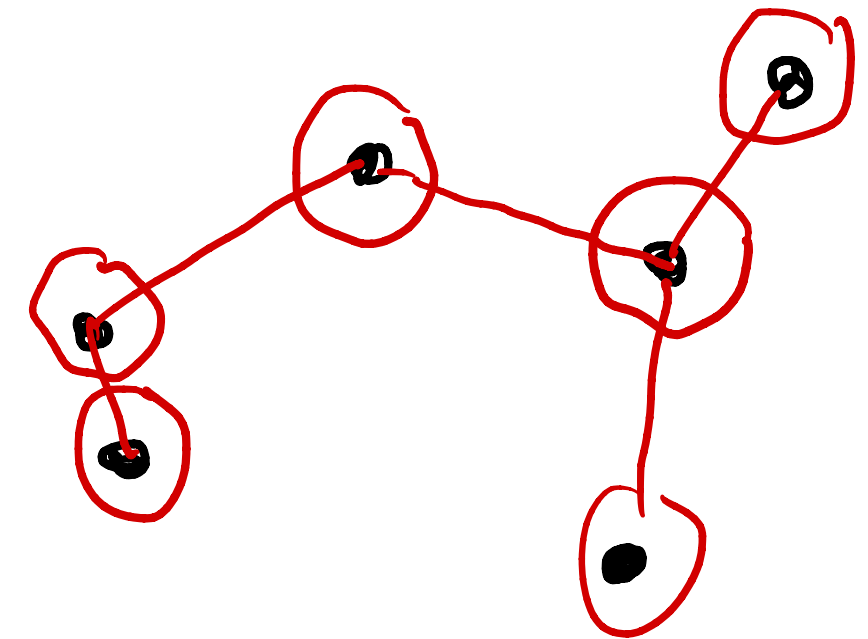
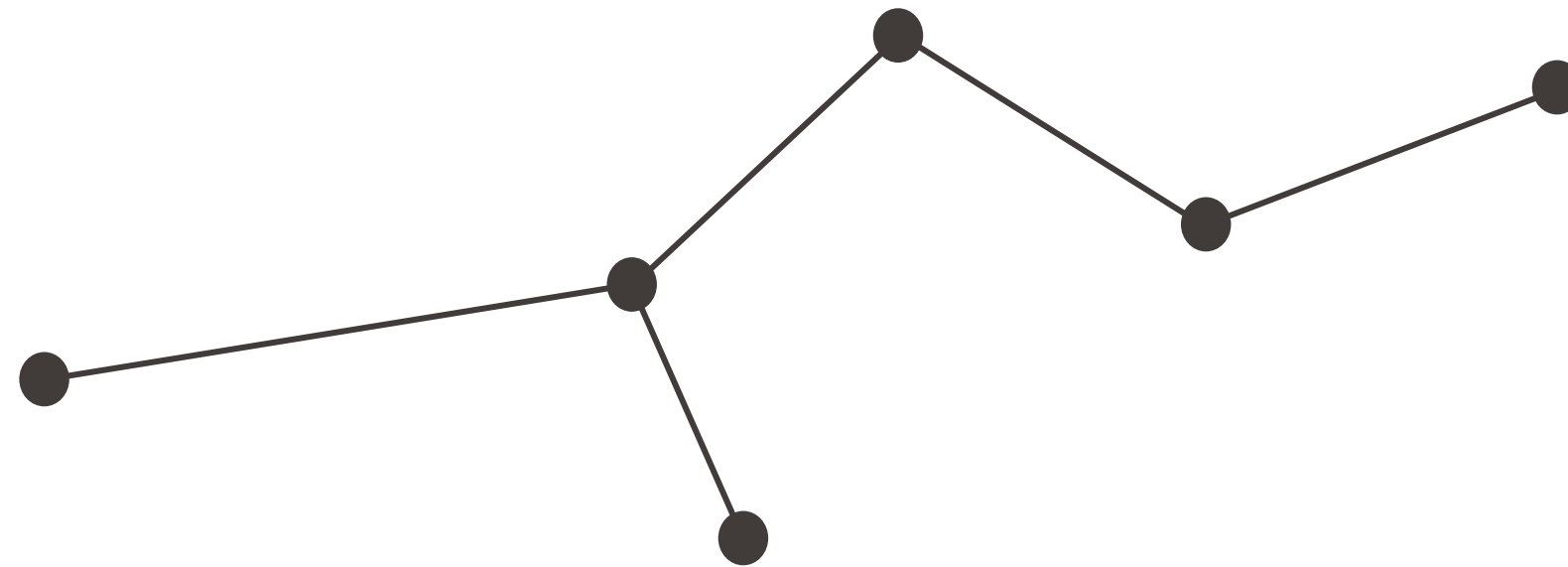
Note: Ceci peut être amélioré à $\leq 1.5 L_{min}$
(Christofides)

à $\leq (1+\epsilon) \cdot L_{min}$

Première étape : arbre couvrant minimal

Etant données des villes sur une carte, on cherche à les relier par un arbre dont la somme des longueurs des branches soit minimale.

Exemple :

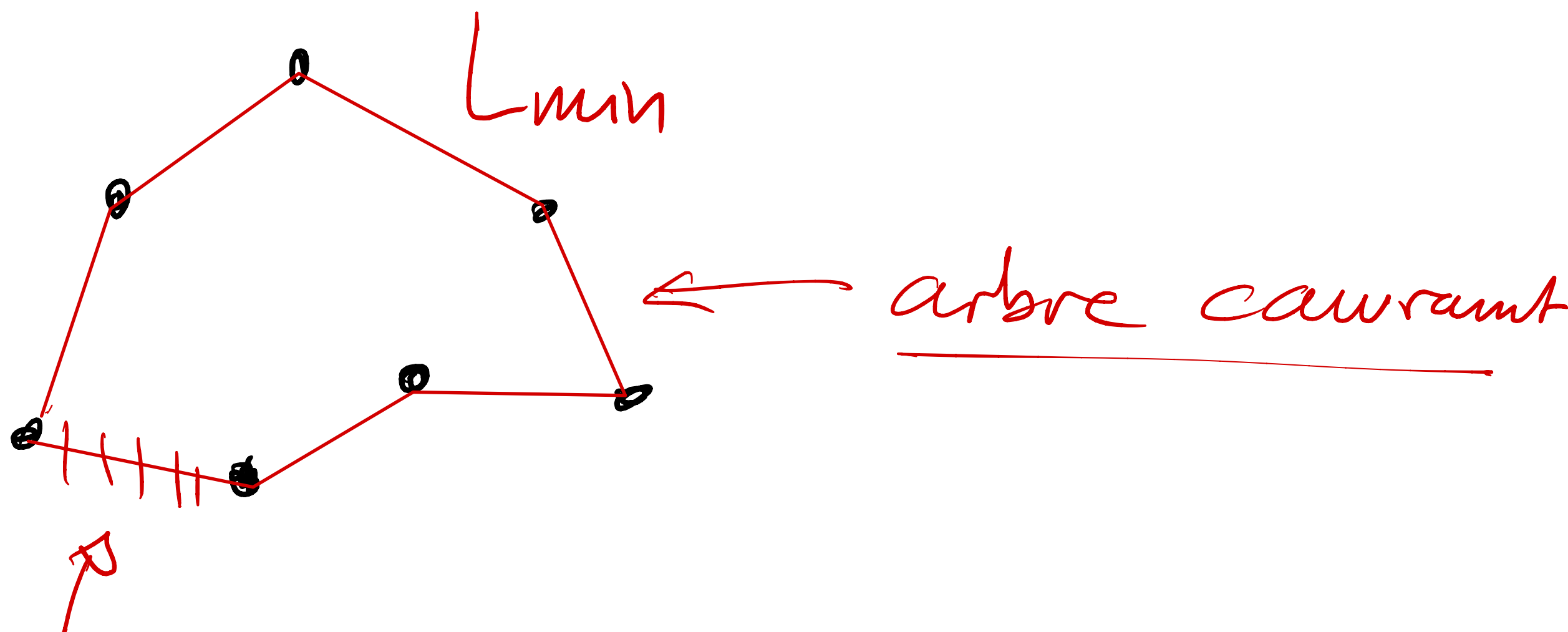


Il est possible de trouver un tel arbre (T) en temps polynomial en n :

1. Commencer avec $T = \{\text{une ville au hasard}\}$ (= racine de l'arbre)
2. Chercher parmi les villes restantes la ville v qui soit la plus proche d'une des villes $w \in T$: rajouter v et la branche $v - w$ à T
3. Recommencer en 2. jusqu'à ce que T contienne toutes les villes

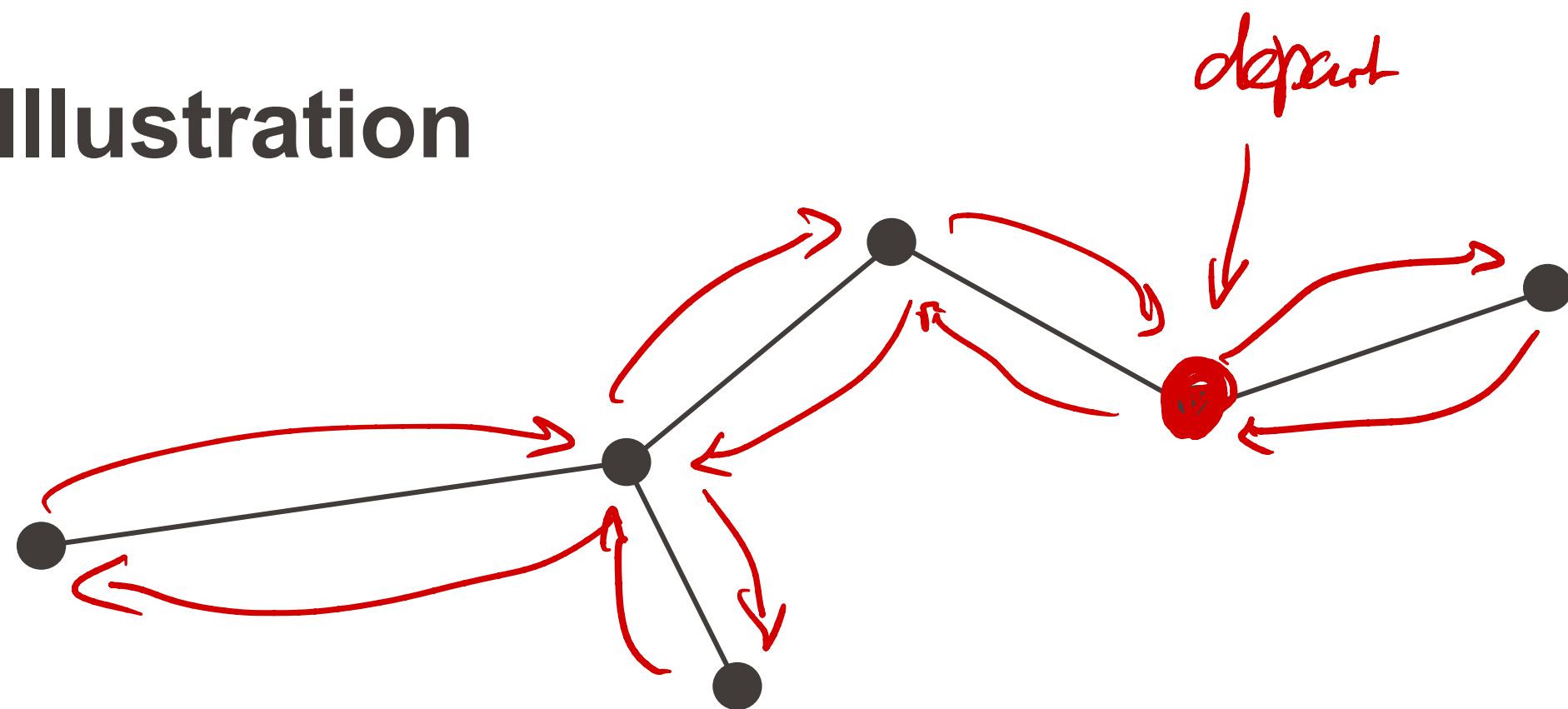
Remarque importante

Si L_T désigne la somme des longueurs des branches de l'arbre couvrant minimal, et L_{min} désigne la longueur du chemin fermé optimal qui passe une fois par chaque ville, alors $L_{min} \geq L_T$.



Deuxième étape : parcours le long de l'arbre

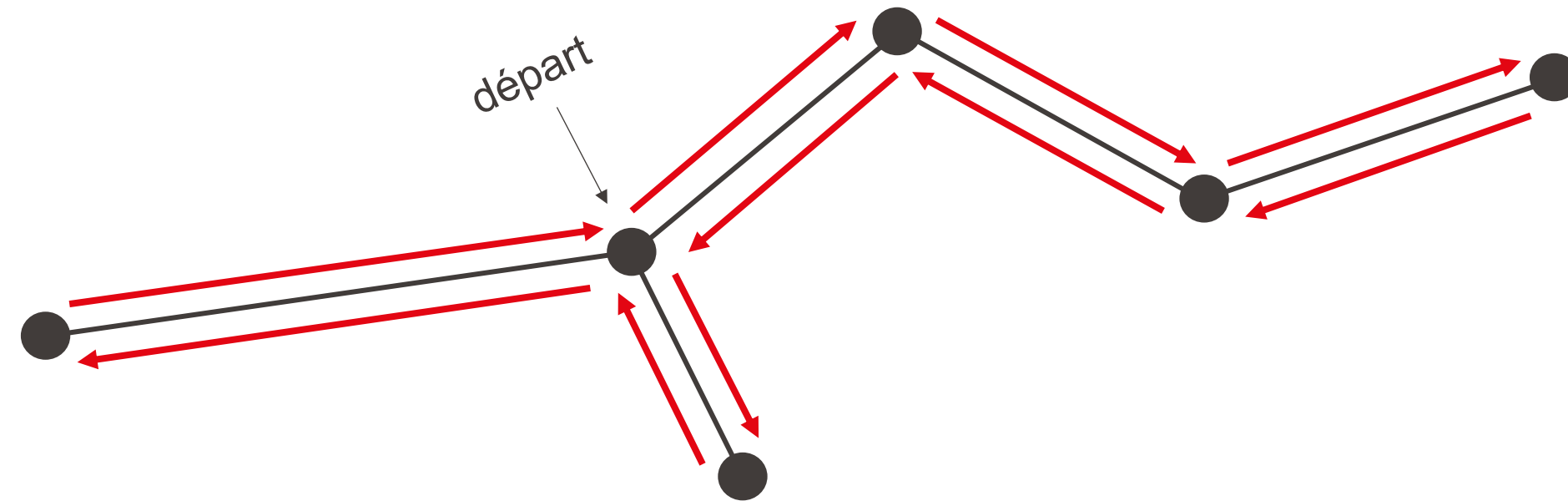
Illustration



longueur de ce chemin
 $= 2 L_T \leq \underline{\underline{2 L_{max}}}$

Deuxième étape : parcours le long de l'arbre

Illustration



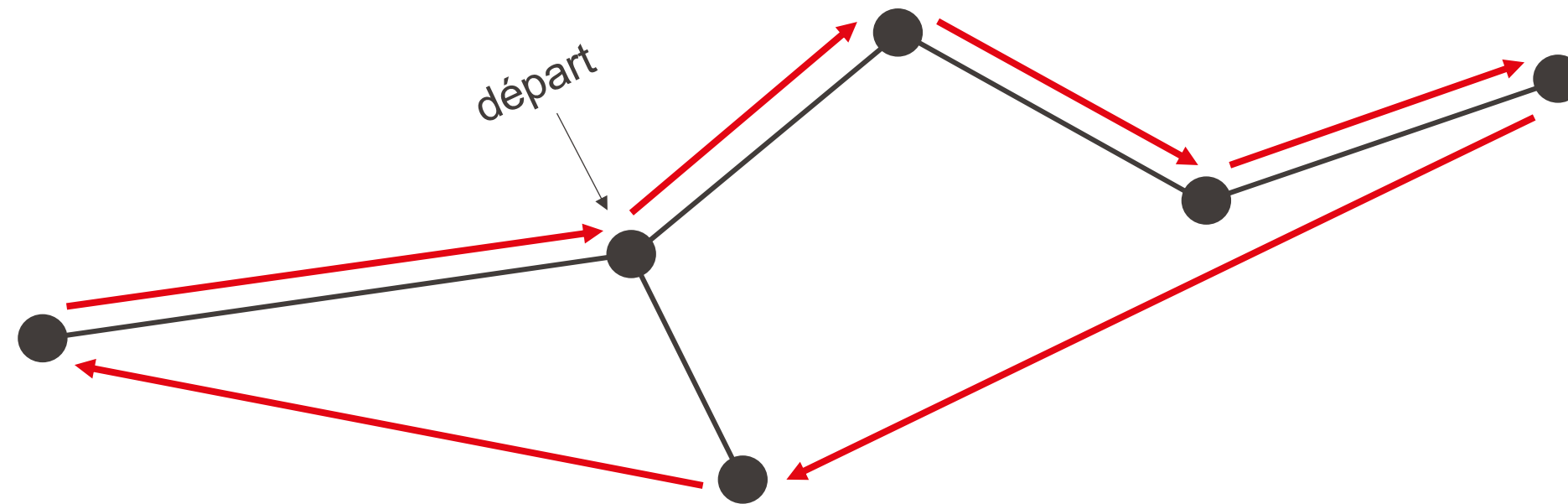
La longueur du chemin rouge vaut $2L_T \leq 2L_{min}$

Presque ce qu'on veut, mais le chemin rouge n'est pas un chemin qui passe une et une seule fois par chaque ville.

Troisième et dernière étape : prendre des raccourcis

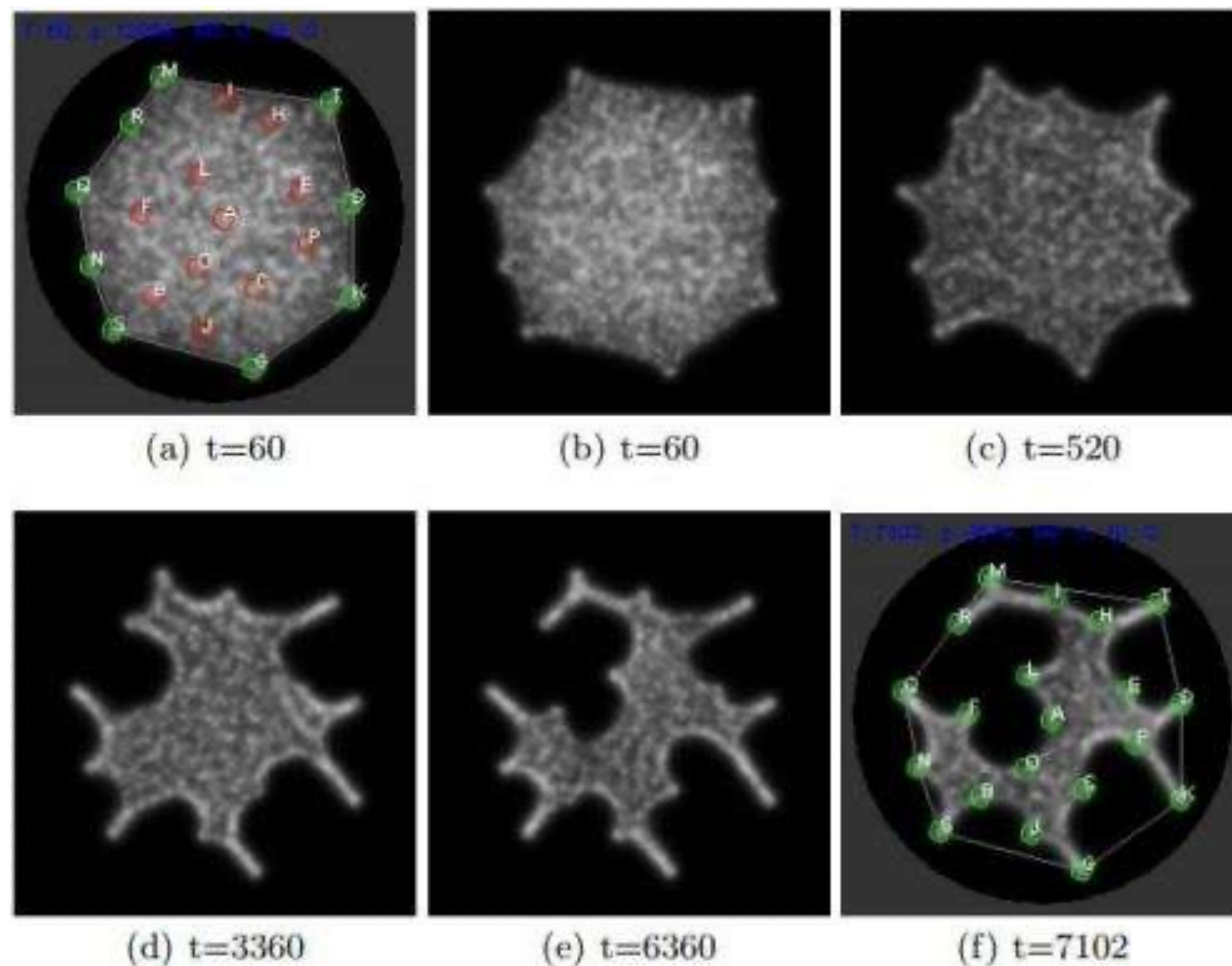
On modifie le chemin rouge en suivant la règle : dès qu'une ville a déjà été visitée, on prend un raccourci vers la ville suivante dans l'arbre.

Illustration



Ce nouveau chemin rouge n'est pas plus long que le précédent (donc $\leq 2L_{min}$), mais il remplit cette fois la condition de passer une fois dans chaque ville. #

Et pour finir, en voilà un qui résout le problème tout seul!



Source: “Computation of the Travelling Salesman Problem by a Shrinking Blob”
<https://arxiv.org/abs/1303.4969>

Il s’agit d’un “blob” (plus savamment, un *physarum polycephalum*), organisme unicellulaire capable d’optimiser sa structure interne pour accéder à de la nourriture.