Exercice 1.

a) $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

b) $D(\tan) = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $\sin(x) = 0 \iff x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} D(f) &= \mathbb{R}\backslash\left(\left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\right) \\ &= \mathbb{R}\backslash\left\{k\tfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

c) $D(\tan) = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $\cos(x) = 0 \iff x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} D(f) &= \mathbb{R}\backslash\left(\left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right) \\ &= \mathbb{R}\backslash\left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

d) $D(\tan) = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi} = \frac{2}{\pi+2k\pi}$. De plus, $\frac{1}{x}$ n'est pas définie pour $x = 0$. Ainsi,

$$D(f) = \mathbb{R}\backslash\left(\left\{\tfrac{2}{\pi+2k\pi} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\}\right)$$

e) Nous avons $x^2 + x = x(x+1) = 0 \iff x \in \{0; -1\}$. Ainsi,

$$D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0; -1\}$$

f) Nous avons $x + 1 = 0 \iff x = -1$. Ainsi,

$$D(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

g) Comme $x^2 + 1 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, nous avons $D(f) = \mathbb{R}$.

h) $D(\tan) = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Or $\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$. Ainsi,

$$D(f) = \mathbb{R}\backslash\left\{\tfrac{\pi}{3} + k\tfrac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

i) Comme $D(\arctan) = \mathbb{R}$ et $D(|x|) = \mathbb{R}$, nous avons $D(f) = \mathbb{R}$.

j) $D(\arcsin) = [-1; 1]$. De plus,

$$\begin{aligned} \tfrac{x}{x+1} \in [-1;1] &\iff -1 \leq \tfrac{x}{x+1} \leq 1 \\ &\iff -x-1 \leq x \leq x+1 \\ &\iff -x-1 \leq x \text{ et } x \leq x+1 \\ &\iff -1 \leq 2x \text{ et } 0 \leq 1 \\ &\iff x \geq -\tfrac{1}{2} \\ &\iff x \in [-\tfrac{1}{2}; +\infty[\end{aligned}$$

Ainsi,

$$D(f) = [-\tfrac{1}{2}; +\infty[$$

k) $D(\sqrt{x}) = \mathbb{R}_+$. De plus,

$$\begin{aligned} \tfrac{x}{x+1} - \tfrac{x}{x-1} \geq 0 &\iff \tfrac{x(x-1)-x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \geq 0 \\ &\iff \tfrac{x(x-1-x-1)}{x^2-1} \geq 0 \\ &\iff \tfrac{-2x}{x^2-1} \geq 0 \end{aligned}$$

Pour résoudre cette dernière inéquation, on effectue une étude de signe :

		-1		0		1	
$-2x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{-2x}{x^2-1}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$

Ainsi, $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} \geq 0$ pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup [0; 1[$. Donc

$$D(f) =]-\infty; -1[\cup [0; 1[$$

l) $D(x^2) = \mathbb{R}$ et $D(\sqrt[3]{x}) = \mathbb{R}$, alors $D(f) = \mathbb{R}$.

m) Attention : on rappelle que l'égalité $(\sqrt[n]{x})^m = (\sqrt[n]{x^m})$ n'est pas nécessairement vraie si $x < 0$; par exemple, si x est négatif, $(\sqrt{x})^2$ n'est pas défini, alors que $\sqrt{x^2} = |x|$. Une conséquence en est qu'on ne définit $x^{\frac{m}{n}}$ que si $\frac{m}{n}$ est irréductible, ou, plus simplement, si m et n n'ont pas de facteur 2 en commun (sinon, pour $x < 0$ pourrait avoir par exemple $x^{\frac{2}{2}} = x^1 = x$, alors que ce n'est ni la valeur de $(\sqrt{x})^2$, ni celle de $\sqrt{x^2} = |x|$). En d'autres termes, $x^{\frac{m}{n}} := (\sqrt[q]{x})^p = (\sqrt[q]{x^p})$, où $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ et p, q ne sont pas tous les deux pairs.

Supposons dorénavant que m et n n'ont plus de facteur 2 en commun dans $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$. Alors

$$D(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \text{ impair,} \\ \mathbb{R}_+ & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

Exercice 2.

a) f est paire car
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^6 + (-x)^4 + (-x)^2 + 1 \\ &= x^6 + x^4 + x^2 + 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) f est impaire car
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 - (-x)^3 + \sin(-x) \\ &= -x^5 + x^3 - \sin(x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

c) f est paire car
$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x) + (-x)^{16} \\ &= \cos(x) + (x)^{16} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

d) f est ni paire ni impaire car
$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x) + \sin(-x) \\ &= \cos(x) - \sin(x) \\ &\neq \pm f(x) \end{aligned}$$

e) f est paire car
$$\begin{aligned} f(-x) &= 3\cos^2(-x) + 7\sin((-x)^2) \\ &= 3\cos^2(x) + 7\sin(x^2) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

f) f est paire car
$$\begin{aligned} f(-x) &= (\cos(-x))^2 + (\sin(-x))^2 \\ &= (\cos(x))^2 + (-\sin(x))^2 \\ &= \cos^2(x) + \sin^2(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

g) f est impaire car
$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-x}{|-x|} \\ &= \frac{-x}{|x|} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

$$\begin{aligned} f \text{ est paire et impaire } &\iff f(-x) = f(x) \text{ et } f(-x) = -f(x) \text{ et } (x \in D \implies -x \in D) \\ &\iff f(x) = f(-x) = -f(x) \text{ et } (x \in D \implies -x \in D) \\ &\iff f(x) = 0 \;\; \forall\, x \in D \text{ et } (x \in D \implies -x \in D) \end{aligned}$$

Ainsi, les seules fonctions paires et impaires sont les fonctions nulles sur leur domaine de définition symétrique par rapport à l'origine.

Exercice 4.

a) p est paire car
$$\begin{aligned} p(-x) &= \tfrac{1}{2}(f(-x) + f(-(-x))) \\ &= \tfrac{1}{2}(f(-x) + f(x)) \\ &= p(x) \end{aligned}$$

b) Nous avons
$$\begin{aligned} i(x) &= f(x) - p(x) \\ &= f(x) - \tfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ &= \tfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{aligned}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} i(-x) &= \tfrac{1}{2}(f(-x) - f(-(-x))) \\ &= \tfrac{1}{2}(f(-x) - f(x)) \\ &= -\tfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \\ &= -i(x) \end{aligned}$$
Ceci nous permet de conclure que i est impaire.

c) Nous savons par **a)** et **b)** que p est paire et i est impaire. Or, $p+i = p+f-p = f$ et comme f est quelconque, l'assertion est démontrée.

d) Nous avons

i)
$$\begin{aligned} p(x) &= \tfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ &= \tfrac{1}{2}(7x^5 - 3x^4 + 6x^2 + 4x - 9 + 7(-x)^5 - 3(-x)^4 + 6(-x)^2 + 4(-x) - 9) \\ &= \tfrac{1}{2}(-6x^4 + 12x^2 - 18) \\ &= -3x^4 + 6x^2 - 9 \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} i(x) &= f(x) - p(x) \\ &= 7x^5 - 3x^4 + 6x^2 + 4x - 9 - (-3x^4 + 6x^2 - 9) \\ &= 7x^5 + 4x \end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned} p(x) &= \tfrac{1}{2}(g(x) + g(-x)) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\cos\left(x + \tfrac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\tfrac{\pi}{3} - x\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\cos(x)\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) - \sin(x)\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) + \cos(x)\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) - \sin(-x)\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(2\cos(x)\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\cos(x) \end{aligned}$$
et ainsi
$$\begin{aligned} i(x) &= g(x) - p(x) \\ &= \cos\left(x + \tfrac{\pi}{3}\right) - \tfrac{1}{2}\cos(x) \\ &= \cos(x)\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) - \sin(x)\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) - \tfrac{1}{2}\cos(x) \\ &= -\sin(x)\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) \\ &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) \end{aligned}$$

Exercice 5.

a) On a :
$$\begin{aligned} f \text{ admet un axe de symétrie } x = a &\iff f(x+a) = f(-x+a) \\ &\iff g(x) = g(-x) \\ &\iff g(x) \text{ est paire.} \end{aligned}$$

b) On a :
$$\begin{aligned} f \text{ admet une symétrie de centre } (a; b) &\iff -f(-x+a) + b = f(x+a) - b \\ &\iff f(-x+a) - b = -(f(x+a) - b) \\ &\iff g(-x) = -g(x) \\ &\iff g(x) \text{ est impaire.} \end{aligned}$$

Exercice 6.

a) Par l'exercice précédent, f admet la droite $x = 2$ pour axe de symétrie si et seulement si $g(x) = f(x+2)$ est paire. Comme
$$\begin{aligned} f(x+2) &= \tfrac{1}{2}(x+2)^2 - 2(x+2) + 3 \\ &= \tfrac{1}{2}(4 + 4x + x^2) - 4 - 2x + 3 \\ &= 2 + 2x + \tfrac{1}{2}x^2 - 4 - 2x + 3 \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 + 1 \end{aligned}$$
nous observons que $g(x) = g(-x)$, et pouvons ainsi conclure que $x = 2$ est bien un axe de symétrie de f.

b) Par l'exercice précédent, $(-1;4)$ est un centre de symétrie de f si et seulement si $g(x) = f(x-1) - 4$ est impaire. Comme

$$\begin{aligned} f(x-1) - 4 &= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 - (x-1) + 1 - 4 \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 6x + 3 - x + 1 + 1 - 4 \\ &= x^3 - 4x \end{aligned}$$

nous voyons que $g(-x) = -g(x)$ et pouvons ainsi conclure que $(-1;4)$ est bien un centre de symétrie de f.

c) Nous procédons de la même manière que ci-dessus :

$$\begin{aligned} f(3+x) - 2 &= \frac{2(x+3)+1}{(x+3)-3} - 2 \\ &= \frac{2x+7}{x} - 2 \\ &= \frac{7}{x} \end{aligned}$$

La fonction g donnée par $g(x) = f(3+x) - 2$ est bien impaire, et nous pouvons conclure que $(3;2)$ est bien un centre de symétrie de f.

d) f admet la droite $x = -1$ pour axe de symétrie si $g(x) = f(x-1)$ est paire. Comme

$$\begin{aligned} f(x-1) &= \frac{4(x-1)^2 + 8(x-1) + 3}{(x-1)^2 + 2(x-1) - 3} \\ &= \frac{4x^2 - 8x + 4 + 8x - 8 + 3}{x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 - 3} \\ &= \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} \end{aligned}$$

la fonction g est bien paire, et nous pouvons conclure que $x = -1$ est bien un axe de symétrie de f.

Exercice 7.

a) Nous avons que $f(x) = f(-x)$, $g(x) = g(-x)$ et $h(-x) = -h(x)$. C'est donc faux car

$$\begin{aligned} (f+h)(-x) &= f(-x) + h(-x) \\ &= f(x) - h(x) \\ &\neq (f+h)(x) \end{aligned}$$

b) C'est vrai car
$$\begin{aligned} (f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x) \\ &= f(x) + g(x) \\ &= (f+g)(x) \end{aligned}$$

c) C'est faux car
$$\begin{aligned} \left(\tfrac{f}{h}\right)(-x) &= \tfrac{f(-x)}{h(-x)} \\ &= \tfrac{f(x)}{-h(x)} \\ &= -\left(\tfrac{f}{h}\right)(x) \end{aligned}$$

d) C'est vrai car
$$\begin{aligned} (|h|)(-x) &= |h(-x)| \\ &= |-h(x)| \\ &= |h(x)| \\ &= (|h|)(x) \end{aligned}$$

e) C'est vrai car
$$\begin{aligned} (|f|)(-x) &= |f(-x)| \\ &= |f(x)| \\ &= (|f|)(x) \end{aligned}$$

f) C'est faux car
$$\begin{aligned} (f+h)^2(-x) &= (f^2 + 2fh + h^2)(-x) \\ &= f^2(-x) + 2f(-x)h(-x) + h^2(-x) \\ &= f^2(x) - 2f(x)h(x) + h^2(x) \\ &\neq (f+h)^2(x) \end{aligned}$$

g) C'est vrai car $$\begin{aligned}(f^2+h^2)(-x) &= f^2(-x)+h^2(-x)\\ &= f^2(x)+(-h(x))^2\\ &= f^2(x)+h^2(x)\\ &= (f^2+h^2)(x)\end{aligned}$$

h) C'est vrai car $\sin(f(-x)) = \sin(f(x))$

i) C'est vrai car $\cos(f(-x)) = \cos(f(x))$

j) C'est vrai car $$\begin{aligned}\sin(h(-x)) &= \sin(-h(x))\\ &= -\sin(h(x))\end{aligned}$$

Exercice 8.

a) Considérons $x, y \in C$ avec $x \neq y$. Si $f \circ g$ est injective, alors $f \circ g(x) \neq f \circ g(y)$, c'est-à-dire $f(g(x)) \neq (f(g(y))$, et forcément $g(x) \neq g(y)$ (car sinon on aurait $f(g(x)) = (f(g(y))$. Donc g est bien injective.

b) Soit $y \in E$. Si $f \circ g$ est surjective, alors il existe $x \in C$ avec $f \circ g(x) = y$, c'est-à-dire $f(g(x)) = y$. En prenant $z = g(x)$, on a trouvé un $z \in D$ qui est envoyé par f sur y. La fonction f est donc surjective.

c) Comme la fonction identité est surjective, $f \circ g = \mathrm{Id}$ implique que f est surjective par (b). Comme la fonction identité est aussi injective, $g \circ f = \mathrm{Id}$ implique que f est injective par (a). f est donc bijective et possède un inverse. Cet inverse est bien g, car si $f(x) = y$, alors $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = x$; en d'autres termes, g envoie bien y sur l'unique (par injectivité de f) élément x tel que $f(x) = y$.
Supposons que f est bijective avec inverse f^{-1}. Par définition, l'inverse f^{-1} envoie $f(x)$ sur x, c'est-à-dire $f^{-1} \circ f(x) = x$ pour tout $x \in D$; de plus, si y est envoyé sur x par f^{-1}, alors par définition encore une fois, $y = f(x)$, ou en d'autres termes $f \circ f^{-1}(y) = y$ pour tout $y \in E$. En posant $f^{-1} = g$, on trouve bien $f \circ g = \mathrm{Id}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}$.

La réciproque de (a) est fausse : prenons par exemple $g(x) = x$ et $f(x) = x^2$ (toutes deux définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ; la fonction $g = \mathrm{Id}$ est injective, mais $f \circ g = f$ ne l'est pas.
La réciproque de (b) est fausse : prenons cette fois $f = \mathrm{Id}$ et g la fonction constante nulle (toutes deux définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ; la fonction $f = \mathrm{Id}$ est surjective, mais $g \circ f = g$ ne l'est pas.

Exercice 9.

a) $\sup(f) = 1$, $\inf(f) = -1$, $\max(f) = 1$, mais f n'atteint pas son minimum.

b) $\sup(f) = 4$, $\inf(f) = 0$, $\max(f) = 4$ et $\min(f) = 0$.

c) $\sup(f) = 9$, $\inf(f) = -7$, $\max(f) = 9$ et $\min(f) = -7$.

d) $\sup(f) = 1$, $\inf(f) = 0$, $\max(f) = 1$ et $\min(f) = 0$.

Exercice 10. Si x est négatif, on a $x^2 - x \geq 0$ et donc $|x^2 - x| = x^2 - x$ et $|x| = -x$, ainsi sur $[-1, 0]$ $f(x) = x^2 - 2x$. Si $x \in \,]0, 1]$ alors $x^2 - x \leq 0$ et donc $|x^2 - x| = -x^2 + x$ et $|x| = x$. Ainsi,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ -x^2 + 2x & \text{si } x \in \,]0, 1] \end{cases}$$

Le minimum de f est donc atteint en $x = 0$ où $f(0) = 0$. Le maximum est atteint en en $x = -1$ où $f(-1) = 3$.

Exercice 11. Montrons tout d'abord que f est bijective.
Soient $x, y \in [0, 1]$ tels que $f(x) = f(y)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & f(x) = f(y) \\ \iff\ & \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - y^2} \\ \iff\ & 1 - x^2 = 1 - y^2 \\ \iff\ & x^2 = y^2 \\ \iff\ & x = y \end{aligned}$$

car $x, y \geq 0$. Nous avons ainsi montré que f est injective.
Soit $y \in [0, 1]$, on cherche $x \in [0, 1]$ tq $f(x) = y$. Posons $x = \sqrt{1 - y^2}$. Ainsi, comme $y \in [0, 1]$, nous avons que $1 - y^2 \in [0, 1]$ et donc $\sqrt{1 - y^2} \in [0, 1]$.

Nous remarquons :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\sqrt{1-y^2}) \\ &= \sqrt{1-(\sqrt{1-y^2})^2} \\ &= \sqrt{1-1+y^2} \\ &= \sqrt{y^2} \\ &= y \end{aligned}$$

car $y \geq 0$. Nous avons ainsi montré que f est surjective.
Ainsi, nous avons montré que f est bijective.
Cherchons maintenant à déterminer l'inverse de f. Posons $g(x) = f^{-1}(x)$. Ainsi,

$$g = f^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}$$

d'où

$$x = f(g(x)) = \sqrt{1-g^2(x)} \iff x^2 = 1 - g^2(x) \iff g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

Vérifions encore que $g \circ f(x) = x$:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sqrt{1-f^2(x)} \\ &= \sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2} \\ &= \sqrt{1-1+x^2} \\ &= \sqrt{x^2} \\ &= x \end{aligned}$$

car $x \geq 0$. D'où $g = f^{-1}$(nous avons même dans ce cas que $f = f^{-1}$).

Exercice 12. La fonction f n'est pas bijective car elle n'est pas injective. En effet, par exemple

$$f(2\pi) = \sin(2\pi) + 2 = 0 + 2 = \sin(3\pi) + 2 = f(3\pi)$$

et $2\pi \neq 3\pi$.
Séparons f en les deux fonctions

$$f' : [\tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{5\pi}{2}] \to [1,3] : x \mapsto \sin(x) + 2$$

et

$$f'' : [\tfrac{5\pi}{2}, \tfrac{7\pi}{2}] \to [1,3] : x \mapsto \sin(x) + 2$$

Comme $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, nous allons poser

$$(f')^{-1} : [1,3] \to [\tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{5\pi}{2}] : x \mapsto \arcsin(x-2) + 2\pi$$

et

$$(f'')^{-1} : [1,3] \to [\tfrac{5\pi}{2}, \tfrac{7\pi}{2}] : x \mapsto -\arcsin(x-2) + 3\pi = \arcsin(2-x) + 3\pi$$

Il est facile de voir que

$$f' \circ (f')^{-1} = (f')^{-1} \circ f' = \mathrm{Id}$$

et

$$(f'')^{-1} \circ f'' = f'' \circ (f'')^{-1} = \mathrm{Id}.$$

Ceci montre que f' et f'' sont bijectives, et que leurs inverses sont bien les fonctions proposées $(f')^{-1}$ et $(f'')^{-1}$.

Exercice 13. Si $r = 0$, la fonction donnée par x^r est la fonctions constante de valeur 1 avec $D(f) = \mathbb{R}$; elle n'est pas bijective et ne possède donc pas de réciproque.
Si $r \in \mathbb{Q}^*$, il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $r = \frac{m}{n}$ avec m et n premiers entre eux. Ainsi, si $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ alors $f^{-1}(x) = x^{\frac{n}{m}}$. En effet,

$$f \circ f^{-1}(x) = \left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{nm}{mn}} = x$$

et

$$f^{-1} \circ f(x) = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{mn}{nm}} = x$$

On rappelle que pour $n \neq 0$, on a $x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m$, et $D(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \text{ impair,} \\ \mathbb{R}_+ & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$