

Corrigé Test 4 - Algèbre linéaire. Série B

5 mars 2025

Exercice 1. ($3 + 3 + 3 = 9$ points)

On considère l'application $f : \mathbb{R}_1[t] \rightarrow \mathbb{R}_2[t]$ par $f(at + b) = (a - 2b)t^2 + 6b - 3a$.

a) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$;

$\text{Ker}(f) = \{at + b \in \mathbb{R}_1[t] \mid a = 2b\}$, donc une base de $\text{Ker}(f)$ est $(2t + 1)$.

b) Déterminer une base de $\text{Im}(f)$;

$\text{Im}(f)$ est engendré par $f(1) = -2t^2 + 6 = -2(t^2 - 3)$ et $f(t) = t^2 - 3$
donc une base de $\text{Im}f$ est $(t^2 - 3)$.

c) Énoncer le théorème du rang et le vérifier sur l'exemple de cet exercice.

Pour $f : V \rightarrow W$ avec V et W de dimension finie, on a $\dim(V) = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)$
Dans l'exemple de cet exercice, on a $2 = 1 + 1$.

Exercice 2. ($2 + 2 + 4 + 1 + 3 = 12$ points)

Dans $M_2(\mathbb{R})$, on considère les sous-ensembles U des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$,

V des matrices de la forme $\begin{pmatrix} t+s & r+s \\ 0 & t+s \end{pmatrix}$ et W des matrices de la forme $\begin{pmatrix} w & 0 \\ x & w \end{pmatrix}$.

a) Montrer que U est sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+a' & 0 \\ 0 & b+b' \end{pmatrix} \in U \text{ et } \lambda \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \lambda b \end{pmatrix} \in U.$$

b) Déterminer une base de V .

$$\mathcal{B}_V = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

c) Déterminer les sous-espaces $U \cap V \cap W$ et $U + V + W$, en donnant une base de chacun d'eux.
Est-ce que $U + V + W$ est une somme directe de $M_2(\mathbb{R})$?

$$\mathcal{B}_{U \cap V \cap W} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \mathcal{B}_{U+V+W} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$U + V + W = M_2(\mathbb{R})$ mais ce n'est pas une somme directe puisque $U \cap V \cap W \neq \{0\}$

d) Si U et V sont deux sous-espaces dans espace vectoriel E , énoncer la relation entre les dimensions de U , V , $U \cap V$ et $U + V$.

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$$

e) Si U , V et W sont trois sous-espaces dans espace vectoriel E , conjecturer une relation entre les dimensions de $U + V + W$, U , V , W , $U \cap V$, $U \cap W$, $V \cap W$ et $U \cap V \cap W$.

Vérifier cette conjecture sur les espaces étudiés dans cet exercice.

$$\dim(U+V+W) = \dim U + \dim V + \dim W - \dim(U \cap V) - \dim(U \cap W) - \dim(V \cap W) + \dim(U \cap V \cap W)$$

Dans notre exemple, on a bien $4 = 2 + 2 + 2 - 1 - 1 - 1 + 1$.

Exercice 3. ($2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4 = 15$ points)

On définit les deux applications linéaires

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y) \longmapsto (x + 2y; 2x - y) \quad (x; y) \longmapsto (x + y; y; 3x)$$

Soit encore les bases $\mathcal{B} = ((1; 1); (1; -2))$ de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{C} = ((0; 1; 0); (0; 0; 1); (\frac{1}{2}; 0; 0))$ de \mathbb{R}^3 .

a) Déterminer la matrice F représentant f relativement à la base canonique de \mathbb{R}^2 .

On calcule $f((1; 0)) = (2; 1)$ et $f((0; 1)) = (-1; 2)$ et on obtient $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) Déterminer la matrice G représentant g relativement aux bases canoniques de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

On calcule $g((1; 0)) = (1; 0; 3)$ et $g((0; 1)) = (1; 1; 0)$ et on obtient $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer H la matrice de $g \circ f$ relativement aux bases canoniques de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

$$H = G \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

d) Déterminer la matrice de changement de base Q de \mathcal{B} vers la base canonique de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire la matrice $(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}an}$.

Les colonnes de Q donnent les composantes des vecteurs de la base \mathcal{B} exprimés dans la base canonique. Donc $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

e) Calculer la matrice de changement de base P de la base canonique de \mathbb{R}^3 vers \mathcal{C} , c'est-à-dire la matrice $(Id)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}}$.

Les colonnes de P donnent les composantes des vecteurs de la base canonique exprimés dans la base \mathcal{B} . Donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) Calculer la matrice G^* de g par rapport aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} à l'aide de la formule du changement de base qui fait intervenir un produit de trois matrices.

$$G^* = P G Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. ($3 + 2 + 1 + 2 = 8$ points)

Discuter et résoudre en fonction de k le système $H_k \cdot X = b_k$ où

$$H_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

On échelonne la matrice augmentée du système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ k & 1 & 1 & k^2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{31}(-k)E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & k-1 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & k^2-k \end{array} \right) \xrightarrow{E_{32}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & k-1 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & k^2-1 \end{array} \right)$$

Le système n'a pas de solution si $2 - k - k^2 = -(k+2)(k-1) = 0$ et $k^2 - 1 = (k+1)(k-1) \neq 0$, c'est-à-dire lorsque $k = -2$.

Si $k = 1$, les deux dernière lignes sont nulles. La première ligne équivaut à l'équation $x + y + z = 1$ et $S = \{(1 - a - b, a, b), a, b, \in \mathbb{R}\}$.

Supposons $k \neq -2$ et $k \neq 1$.

$$D_3\left(\frac{-1}{(k+2)(k-1)}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-(k+1)}{k+2} \end{array} \right) \xrightarrow{E_{12}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-(k+1)}{k+2} \end{array} \right) \xrightarrow{E_{23}(1)E_{13}(-(k+1))}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{(k+1)^2}{(k+2)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-(k+1)}{k+2} \end{array} \right) \text{ d'où } S = \left\{ \left(\frac{(k+1)^2}{(k+2)}, \frac{1}{k+2}, \frac{-(k+1)}{k+2} \right) \right\} \text{ si } k \neq -2 \text{ et } k \neq 1.$$

Exercice 5. ($4 + 3 + 2 = 9$ points)

On donne une application linéaire $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ par sa matrice A relativement à la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres éventuelles de α et les espaces propres associés.

$\det(A - \lambda I) = -\lambda \cdot (2 - \lambda)^2 \Rightarrow$ deux valeurs propres : $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$ (double).

$$E_0 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ d'où } E_0 = \ker(\alpha) = \langle (0; 1; 1) \rangle$$

$$E_2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ d'où } E_2 = \langle (1; 1; 0), (0; 0; 1) \rangle$$

b) Dire pourquoi α est diagonalisable, déterminer une matrice de changement de base P et la matrice diagonale D correspondant à cette nouvelle base.

α est diagonalisable car $\dim E_0 + \dim E_2 = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ d'où } E_2$$

c) Caractériser géométriquement α .

α est une projection de direction $E_0 = \langle (0; 1; 1) \rangle$ sur le plan vectoriel $E_2 = \langle (1; 1; 0), (0; 0; 1) \rangle$, composée avec une homothétie de rapport 2 et de centre 0.

Exercice 6. ($5 + 1 = 6$ points)

Soit V un K -espace vectoriel et $\alpha : V \rightarrow V$ un isomorphisme.

a) Montrer que l'application réciproque $\alpha^{-1} : V \rightarrow V$ est K -linéaire.

Soient $u, v \in V$ et $\lambda \in K$.

On a $\alpha(\alpha^{-1}(u + v)) = u + v = \alpha(\alpha^{-1}(u)) + \alpha(\alpha^{-1}(v)) = \alpha(\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v))$.

En utilisant l'injectivité de α , on obtient $\alpha^{-1}(u + v) = \alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)$.

De même, comme $\alpha(\alpha^{-1}(\lambda u)) = \lambda u = \lambda(\alpha(\alpha^{-1}(u))) = \alpha(\lambda(\alpha^{-1}(u)))$,

on obtient, par l'injectivité de α , $\alpha^{-1}(\lambda u) = \lambda(\alpha^{-1}(u))$.

b) Pourquoi α^{-1} est-il aussi un isomorphisme ?

α^{-1} est un isomorphisme d'espaces vectoriels puisqu'elle est bijective et linéaire.

Exercice 7. (5 points)

On considère une application linéaire $p : V \rightarrow V$ qui vérifie $p \circ p = p$.

Montrer que les seules valeurs propres possibles sont 0 et 1.

Soit λ une valeur propre de p . Alors il existe $v \neq 0$ tel que $p(v) = \lambda v$.

Par conséquent, $p(p(v)) = p(\lambda v) = \lambda p(v) = \lambda^2 v$. Or, $p(p(v)) = p(v) = \lambda v$, donc $\lambda v = \lambda^2 v$.

On a donc $(\lambda - \lambda^2)v = 0$ et les valeurs propres sont 1 et 0.