

Les exercices indiqués par une étoile \star sont optionnels.

Exercice 1. (a) Soit k un corps. Trouver tous les idéaux de l'anneau quotient $k[t]/(t^2)$. Déterminer lesquels sont premiers et lesquels sont maximaux.

(b) Soit $I \subset M \subset A$ deux idéaux d'un anneau A et soit $\pi : A \rightarrow A/I$ l'homomorphisme quotient. Montrer que l'idéal $\pi(M)$ est maximal dans A/I si et seulement si M est maximal dans A .

Exercice 2 (Fonctions polynomiales.).

Soit A un anneau commutatif et $\mathcal{F}(A)$ l'anneau des fonctions $\varphi : A \rightarrow A$ où la somme et le produit sont définis dans l'ensemble d'arrivée (par exemple $(\varphi \cdot \phi)(a) = \varphi(a) \cdot \phi(a)$). On considère l'évaluation comme application $\text{ev} : A[t] \rightarrow \mathcal{F}(A)$. L'évaluation d'un polynôme f est donc la fonction polynomiale $\text{ev}(f)$ définie par $\text{ev}(f)(a) = \text{ev}_a(f) = f(a)$.

(a) Montrer que l'évaluation est un homomorphisme d'anneaux.

(b) Montrer que si A est fini, alors l'évaluation n'est pas injective.

(c) Montrer que si A est intègre et infini, alors l'évaluation est injective.

Exercice 3.

Soit A un anneau commutatif. On note $\text{nil}(A)$ pour les éléments nilpotents de A . Soit k un corps.

- Déterminer $\text{nil}(A)$, où $A = k[x, y]/(x^2y^3)$.
- Écrire $\text{nil}(A)$ comme l'intersection d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$, $\text{nil}(A) = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{p}_i$, pour m minimal.
- Déterminer les premiers minimaux de A .

Exercice 4.

Montrer que $\mathbb{F}_p[x]/(x^p - 1)$ n'est pas isomorphe à un produit de deux anneaux non-nuls.

Exercice 5.

L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

- Montrer que la norme $N : \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $N(a + b\sqrt{5}) = a^2 - 5b^2$ est une fonction multiplicative (donc que $N(xy) = N(x)N(y)$ – noter que si l'on définit $\overline{a + b\sqrt{5}} = a - b\sqrt{5}$, alors $N(x) = x\overline{x}$) et que $a + b\sqrt{5}$ est inversible si et seulement si $N(a + b\sqrt{5}) = \pm 1$.
- Montrer que $9 + 4\sqrt{5}$ est inversible et en déduire que $(\mathbb{Z}[\sqrt{5}])^\times$ est infini.
- Montrer qu'il n'existe aucun élément de norme 2 ou -2 , si bien que tout élément de norme 4 est irréductible.
- Trouver deux décompositions de 4 en produit d'irréductibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.
- L'idéal $(3 + \sqrt{5})$ est-il premier?

Exercice 6.

Soit $d > 1$. On note $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$. On note $N(a + bi\sqrt{d}) = a^2 + db^2$.

- Lister les éléments $x \in A$ tel que $N(x) \leq d + 1$.

2. Montrer que $i\sqrt{d}$, $1 + i\sqrt{d}$ et $1 - i\sqrt{d}$ sont irréductibles.
3. Si $d + 1$ n'est pas premier *dans* \mathbb{Z} , alors A n'est pas factoriel.
4. Si $q = d + 1$ est premier *dans* \mathbb{Z} alors celui-ci admet une factorisation unique en irréductibles dans A .