

Série 24

Exercice 1. Dans les cas suivants, détermine le domaine de définition de f , et esquisse son graphe. Trouve ensuite deux suites (x_n) et (y_n) qui convergent vers 1, mais telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$. Que peux-tu conclure sur $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?

- a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$;
- b) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$.

Exercice 2. Soit la fonction “valeur absolue” $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = |x|$.

- a) Démontre avec la définition de limite d’une fonction (c’est-à-dire avec les ε et δ) que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = |a|$.
- b) Démontre avec la convergence de suites que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = |a|$.

Indication. Commence par démontrer l’inégalité $||x| - |a|| \leq |x - a|$.

Exercice 3. Opérations algébriques. À l’aide des règles de somme, multiplication, *etc.*, calcule les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$;
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x}$;
- c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - x}{x+2}$;
- d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} \right|$;
- e) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$;
- f) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$ pour $a > 0$;
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$;
- h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x + 24} - \sqrt{x + 15}}$;
- i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ pour $a > 0$.

Exercice 4. Sur la parabole d’équation $y = x^2$ on choisit un point M différent de l’origine. On trace le segment $[OM]$ et sa médiatrice. Celle-ci coupe l’axe Oy en un point N . Calcule l’ordonnée de ce point en fonction des coordonnées du point M . Cette fonction est-elle définie en 0 ? Vers quelle valeur tend l’ordonnée de N lorsque M tend vers l’origine ?

Exercice 5. Démontre la proposition suivante du cours :

Proposition. Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b.$$

Exercice 6. [Limites de fonctions par les séries, suite.] Énonce, sans les démontrer, les versions de la Proposition suivante lorsque a ou b sont remplacés par $+\infty$ ou $-\infty$:

Proposition. La fonction réelle f , définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, admet $b \in \mathbb{R}$ pour limite lorsque x tend vers a si et seulement si l’image par f de toute suite de $D(f) \setminus \{a\}$ qui tend vers a est une suite qui tend vers b . En particulier, si b et b' sont deux limites de f lorsque x tend vers a , alors $b = b'$.

Exercice 7. Démontre en utilisant des suites que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Exercice 8. [Limites infinies.] Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a . On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$. À partir de la définition d'une limite de fonction, démontre les résultats suivants.

- a) $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$; c) $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = +\infty$.

Remarque. En adaptant la démonstration de **b)**, on obtient facilement par exemple $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Exercice 9. Calcule les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x} \right)$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - x + 3)$;
b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(x^2 + 3x + 4 + \frac{1}{x-3} \right)$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} \right|$;

Exercice 10. Calcule les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x}{3x^2 - 5x + 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 - 27}$;
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2}{9x + 7}$.

Attention. Tu ne peux pas utiliser directement les résultats sur la convergence des suites rationnelles (pourquoi?). Il faut utiliser $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, et procéder explicitement comme dans la démonstration sur les limites de suites rationnelles.

Exercice 11. Soit $a \neq 0$. On considère l'équation quadratique $ax^2 + 3x + 1 = 0$. Quelles sont ses solutions? Calcule la limite de ces solutions lorsque a tend vers zéro.

Exercice 12. Vrai ou faux? Dans chaque cas donne une explication ou un contre-exemple!

- a) Une fonction définie en a est aussi définie au voisinage de a .
b) Une fonction définie en a est aussi définie à droite de a .
c) Une fonction définie au voisinage de a est aussi définie à gauche de a .
d) Une fonction définie au voisinage de a est aussi définie en a .
e) Si f n'est pas définie en a , alors elle admet une asymptote verticale en ce point.
f) Si f admet une asymptote verticale en a , alors elle n'est pas définie en a .
g) Si les fonctions f et g tendent toutes deux vers 0 lorsque x tend vers a , alors la fonction f/g tend vers 1.
h) On considère une fonction f définie au voisinage de zéro. Si les deux suites $(f(1/n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(-1/n))_{n \in \mathbb{N}}$ tendent chacune vers zéro lorsque n tend vers l'infini, alors la fonction f tend vers zéro lorsque x tend vers zéro.
i) Si f définie sur $\mathbb{R}_+$ est telle que la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers a , alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$.

Exercice 13. Calcule $\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \tan(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x)$. Quelles sont les asymptotes de ces fonctions?

Exercice 14. Que dire de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x)$? Choisis astucieusement deux suites qui tendent vers l'infini, mais dont les images par la fonction cosinus sont différentes.