

Corrigé série 20

Exercice 1 (10 points)

On commence par chercher les valeurs propres en calculant le déterminant de la matrice $A - \lambda I$:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 1 \\ 1 & 4 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 28\lambda + 24 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 8\lambda - 12) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$$

Les valeurs propres sont donc 2 et 6.

On calcule les espaces propres associés de la même manière que dans la série 19 et on obtient

$$E_2 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\} = \langle (1; 0; -1); (0; 1; -2) \rangle$$

et

$$E_6 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\} = \langle (1; 1; 1) \rangle$$

Comme $\dim(E_2) + \dim(E_6) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, α est diagonalisable. La base correspondante est la base formées des vecteurs propres : $\mathcal{B}^* = ((1; 0; -2); (0; 1; 0); (1; 1; 1))$.

La matrice de changement de base et la matrice diagonale sont :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour calculer l'inverse, on utilise la matrice augmentée $(P \mid I)$ qu'on échelonne. On obtient la matrice

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

Exercice 2 (10 points)

a) On commence par chercher les valeurs propres en calculant le déterminant de la matrice $A - \lambda I$:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 6 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)[(7 - \lambda)(5 - \lambda) + 1] = (6 - \lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 36) = -(\lambda - 6)^3$$

La seule valeur propre est donc 6.

b) On calcule l'espace propre associé et on obtient

$$E_6 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

c) α n'est pas diagonalisable car $\dim(E_6) = 2 \neq 3 = \dim(V)$

Exercice 3 (10 points)

- a) $\alpha(x^2 - 2x + 1) = -x^2 + 2x - 1 = -1 \cdot (x^2 - 2x + 1)$, donc oui, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = -1$.
- b) On commence par déterminer la matrice relativement à la base canonique $(x^2; x; 1)$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite les valeurs propres en calculant le déterminant de la matrice $A - \lambda I$:

$$\det(A - \lambda I) = (-1 - \lambda)(-\lambda)(1 - \lambda)$$

Les valeurs propres sont donc -1 , 0 et 1 .

On calcule les espaces propres associés et on obtient $E_{-1} = \langle x^2 - 2x + 1 \rangle$, $E_0 = \langle x - 1 \rangle$ et $E_1 = \langle 1 \rangle$.

Comme $\dim(E_{-1}) + \dim(E_0) + \dim(E_1) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$, α est diagonalisable. La base correspondante est la base formée des vecteurs propres : $\mathcal{B}^* = (x^2 - 2x + 1, x - 1, 1)$.

La matrice diagonale associée à cette base est :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (10 points)

- a) Comme dans les exercices précédents, on commence par chercher les valeurs propres et les espaces propres correspondants. On trouve que les valeurs propres sont 0 et 1 et que les espaces propres associés sont $E_0 = \langle (2; 1) \rangle$ et $E_1 = \langle (3; 1) \rangle$. Il s'agit donc d'une projection sur la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) De la même manière, on obtient que les valeurs propres sont -1 et 1 et les espaces propres associés $E_{-1} = \langle (1; 0; 1); (0; 1; 0) \rangle = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$ et $E_1 = \langle (2; 1; 1) \rangle$. Il s'agit d'une symétrie relativement à la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallèlement au plan $x - z = 0$.

Exercice 5 (10 points)

On commence par remarquer que si $b = 0$, alors $a = \pm 1$ et les matrices sont des matrices diagonales. Supposons que $b \neq 0$. On calcule

$$\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(-a - \lambda) - b^2 = -a^2 + \lambda^2 - b^2 = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Les valeurs propres sont donc -1 et 1 . On calcule les espaces propres associés et on obtient $E_{-1} = \langle \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix} \rangle$ et $E_1 = \langle \begin{pmatrix} a+1 \\ b \end{pmatrix} \rangle$. C'est donc une symétrie relativement à la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} a+1 \\ b \end{pmatrix}$ parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (10 points)

On choisit la base $\mathcal{B}^* = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (\vec{e}_1^*; \vec{e}_2^*; \vec{e}_3^*)$.

Dans cette base, on a $p(\vec{e}_1^*) = 0$, $p(\vec{e}_2^*) = \vec{e}_2^*$ et $p(\vec{e}_3^*) = \vec{e}_3^*$. Ainsi, on a la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}^*$. Alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a $S = P \cdot D \cdot P^{-1}$. On calcule donc la matrice inverse P^{-1} , en échelonnant la matrice augmentée $(P \mid I)$ ou en calculant directement la matrice de passage de la base $\mathcal{B}^*$ à la base $\mathcal{B}$ et on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient finalement

$$S = P \cdot D \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 (10 points)

On choisit par exemple le vecteur $\vec{n}_\pi = \vec{v} - \vec{v}' = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, qui est orthogonal au plan.

Comme sa norme vaut 4, on le normalise et on choisit le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

Pour créer une base orthonormée, il faut choisir deux vecteurs orthogonaux à $\vec{n}$ et unitaires, par exemple $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

On pose la base $\mathcal{B}^* = (\vec{n}, \vec{d}, \vec{e})$ et dans cette base, on a $s(\vec{n}) = -\vec{n}$, $s(\vec{d}) = \vec{d}$ et $s(\vec{e}) = \vec{e}$. Ainsi, on a la matrice

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}^*$. Alors

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

et on a $S = P \cdot D \cdot P^{-1}$. On calcule donc la matrice inverse P^{-1} , en échelonnant la matrice augmentée $(P \mid I)$ ou en calculant directement la matrice de passage de la base $\mathcal{B}^*$ à la base $\mathcal{B}$ et on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

On obtient finalement

$$S = P \cdot D \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 (5 points)

Soit λ une valeur propre de p . Alors il existe $v \neq 0$ tel que $p(v) = \lambda v$. Par conséquent, $p(p(v)) = p(\lambda v) = \lambda p(v) = \lambda^2 v$. Or, $p(p(v)) = p(v) = \lambda v$, donc $\lambda v = \lambda^2 v$. On a donc $(\lambda - \lambda^2)v = 0$ et les valeurs propres sont 1 et 0.

Exercice 9 (5 points)

Soit λ une valeur propre de s . Alors il existe $v \neq 0$ tel que $s(v) = \lambda v$. Par conséquent, $s(s(v)) = s(\lambda v) = \lambda s(v) = \lambda^2 v$. Or, $s(s(v)) = Id(v) = v$, donc $v = \lambda^2 v$. On a donc $(\lambda^2 - 1)v = 0$ et les valeurs propres sont -1 et 1 .