Test 4 - Algèbre linéaire II 6 mars 2024

Nom: ____________________ Prénom: ____________________

Le test dure 105 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire dans le dossier. Au besoin, il est possible d'utiliser des feuilles supplémentaires. Justifiez tous vos calculs.

Exercice 1. *(13 points)*

a) Déterminer un espace vectoriel isomorphe à $M_{2\times 5}(\mathbb{C})$

b) Donner la définition de deux matrices semblables.

c) Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Montrer que l'image de α est un sous-espace vectoriel de W.

d) Enoncer le théorème du rang.

e) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et I_n sont semblables, alors $A = I_n$.

Exercice 2. *(12 points)*

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application donnée par

$$f(x; y; z) = (x - 2y; 6y - 3z)$$

a) Montrer que f est une application linéaire.

b) Déterminer une base du noyau et sa dimension.

c) Déterminer le rang de f.

d) Est-ce que l'application est injective, surjective, bijective ? Justifier.

Exercice 3. *(10 points)*

Discuter en fonction de m et résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + mz = 1 \end{cases}$$

Exercice 4. *(11 points)*

On considère une application linéaire $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice A associée à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de A.

b) Déterminer les espaces propres associés à chaque valeur propre.

c) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ satisfait $P^{-1}AP = D$ où D est diagonale.

Déterminer la matrice diagonale D correspondante.

d) Caractériser géométriquement l'application α.

Exercice 5. *(9 points)*

Soit $\alpha : \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ l'application définie par

$$\alpha(P) = (1 - x) \cdot P$$

a) Déterminer la matrice de α relativement aux bases canoniques $(x^2; x; 1)$ et $(x^3; x^2; x; 1)$ de $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ et $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$.

b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (1 - x; x^2 - 3x; 2 + x^2)$ forme une base de $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$.

c) Soit $\mathcal{C} = (1; x^3; x; x^2)$ une base de $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$.
Donner la matrice de α par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 6. *(8 points)*

On considère l'application $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui associe à tout vecteur $\overrightarrow{v}$ son symétrique $s(\overrightarrow{v})$ relativement à la droite $2x - y = 0$ et parallèlement à la droite $x + y = 0$.
Déterminer la matrice de s relativement à la base canonique.

Exercice 7. *(3 points)*

Expliquer en détails pourquoi une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^4$ ne peut pas être surjective.