

# **EPFL** Rappel : ingrédients de base des algorithmes

## **Données**

- Entrées
- Sorties
- Variables internes

## **Instructions**

- Affectations
- Structures de contrôle
  - Branchements conditionnels (tests)
  - Itérations (boucles)
  - Boucles conditionnelles



# Information, Calcul et Communication

Sous-algorithmes

Olivier Lévêque



Kathryn Greenhill [CC BY-SA 2.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/>)]

Un problème récurrent :  
comment préparer ses  
valises en famille ?

## Solution 1

Algorithme centralisé : une personne se charge de tout: pas idéal...

## Solution 2

Chacun prépare sa propre valise: beaucoup mieux !

Et encore mieux: chaque personne prépare séparément :

- ses habits
- sa trousse de toilette
- ses livres
- sa tenue de plongée ...

# Un exemple en pseudocode

## algorithme principal

entrée : ...  
sortie : ...

...  
 $x \leftarrow \text{algo1}(5)$   
 $k \leftarrow 10$   
 $y \leftarrow \text{algo2}(k)$   
 $z \leftarrow x + \text{algo1}(y)$   
...

## algo1

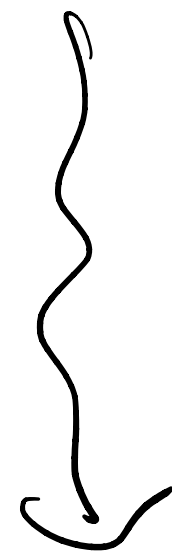
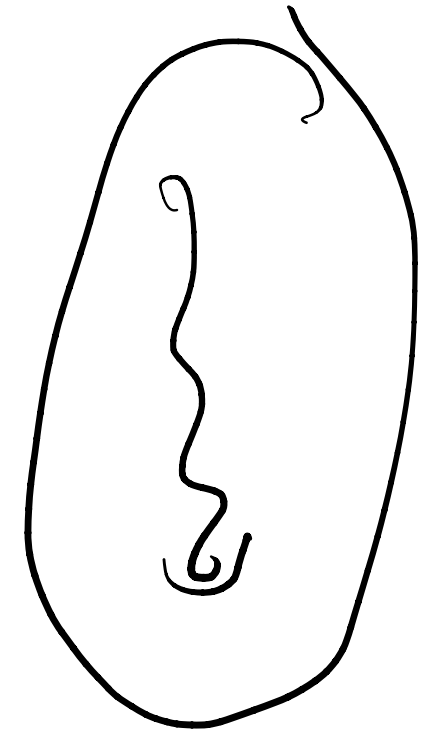
entrée : nombre entier  $n$   
sortie : nombre entier  $s1$

(instructions)

## algo2

entrée : nombre entier  $n$   
sortie : nombre entier  $s2$

(instructions)



# Illustration du principe avec le tri d'une liste

## Tri d'une liste de nombres

Comment trier une liste de nombres ? (ou un jeu de cartes, ou encore une liste de noms, ou ...)

$$L = (13, 12, 15, 16, 8, 22, 30, 4)$$

$$\stackrel{?}{\rightarrow} L' = (4, 8, 12, 13, 15, 16, 22, 30)$$

?

~~Pour  $i$  allant de 2 à  $n$ :~~

~~si  $L(i) > L(i-1)$ , alors permuter  $L(i)$  et  $L(i-1)$~~

~~Sortir  $L$~~

# Illustration du principe avec le tri d'une liste

## Tri d'une liste de nombres

Comment trier une liste de nombres ? (ou un jeu de cartes, ou encore une liste de noms, ou ...)

Il existe de nombreuses façons de faire, plus ou moins efficaces. Nous allons en voir une: le **tri par insertion**, qui permet de bien illustrer le principe de l'utilisation de sous-algorithmes.

# Tri par insertion: algorithme principal

(Complexité temporelle:  $\Theta(n^2)$ )

## tri par insertion

entrée : liste de nombres  $L$ , taille de la liste  $n$   
 sortie : liste  $L$  triée dans l'ordre croissant

Pour  $i$  allant de 2 à  $n$  :

Si  $L(i) < L(i - 1)$ , alors :

$L \leftarrow \text{insérer}(L, i)$

Sortir :  $L$

$n=5$

$L = (5, 14, 3, 8, 7)$   
 $i=2$

$14 < 5?$  non

$L = (5, 14, 3, 8, 7)$   
 $i=3$   
 $3 < 14?$  oui  
 $\uparrow$  insérer

$L = (3, 5, 14, 8, 7)$   
 $i=4$   
 $8 < 14?$  oui  
 $\uparrow$  insérer

$L = (3, 5, 7, 8, 14)$  ←  $L = (3, 5, 8, 14, 7)$   
 $i=5$   
 $7 < 14?$  oui  
 $\uparrow$  insérer



# Tri par insertion: sous-algorithme 1

insérer

entrée : liste de nombres  $L$ , nombre entier positif  $i$   
 sortie : liste  $L$  avec l'élément  $L(i)$  bien placé

$j \leftarrow i$

Tant que  $j > 1$  &  $L(j) < L(j-1)$ :

$L \leftarrow \text{permuter}(L, j, j-1)$

$j \leftarrow j-1$

Sortir :  $L$

~~$L = (3, 8, 4, 7, 5)$~~   
 $\uparrow$   
 $i=4$

$i=5$ :  $L = (3, 5, 8, 14, 7)$   
 $\uparrow$   
 $i=5$

$j=5$   $(3, 5, 8, 14, 7)$   
 $j=5$

$7 < 14$ ? oui

$(3, 5, 8, 7, 14)$   
 $j=4$

$7 < 8$ ? oui

$(3, 5, 7, 8, 14)$   
 $j=3$

$7 < 5$ ? non

Sortir  $L = (3, 5, 7, 8, 14)$

# Tri par insertion: sous-algorithme 1

## insérer

entrée : liste de nombres  $L$ , nombre entier positif  $i$   
sortie : liste  $L$  avec l'élément  $L(i)$  bien placé

$j \leftarrow i$

Tant que  $j > 1$  &  $L(j) < L(j - 1)$  :

$L \leftarrow \text{permuter}(L, j, j - 1)$

$j \leftarrow j - 1$

Sortir :  $L$

### Remarque importante :

Les éléments  $L(1) \dots L(i - 1)$  doivent être déjà triés pour que ce sous-algorithme fonctionne correctement. Heureusement, c'est le cas ici !

# Tri par insertion: sous-algorithme 2

permuter

entrée : liste de nombres entiers  $L$ , nombres entiers positifs  $j, k$   
 sortie : liste  $L$  avec les éléments  $L(j)$  et  $L(k)$  permutés

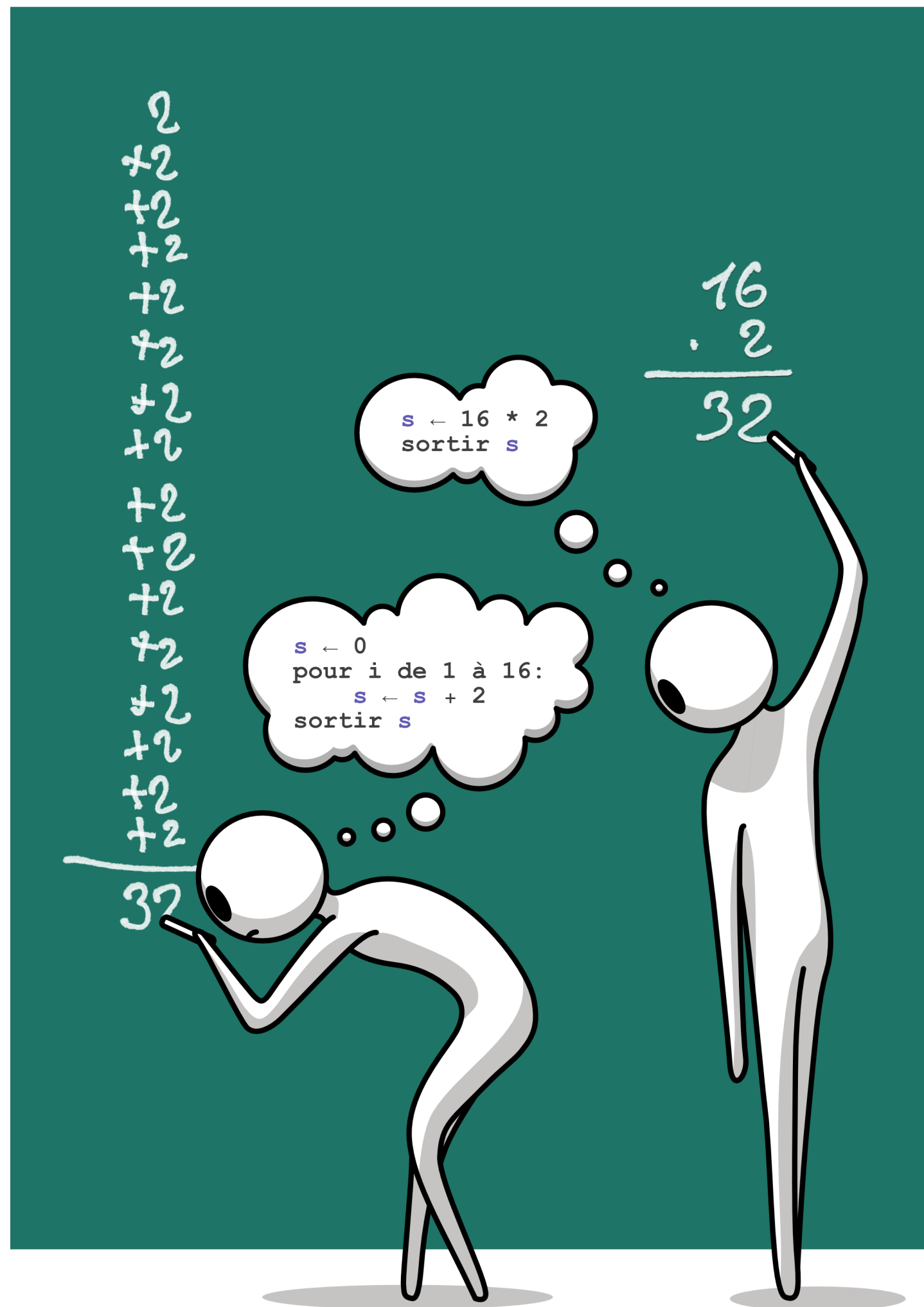
$temp \leftarrow L(j)$   
 $L(j) \leftarrow L(k)$   
 $L(k) \leftarrow temp$   
 Sortir :  $L$

$temp = 2$   
 $L(j) = 3$   
 $L(k) = 2$  ✓

~~$L(j) \leftarrow L(k)$   
 $L(k) \leftarrow L(j)$~~

$L(j) = 2$   
 $L(k) = 3$

$L(j) = 3$   
 $L(k) = 3$  ✗



# Information, Calcul et Communication

Algorithmes :  
complexité temporelle

# Complexité temporelle d'un algorithme

La complexité temporelle d'un algorithme est son temps d'exécution.

## Définition plus précise :

La complexité temporelle d'un algorithme est le nombre **d'opérations élémentaires** effectuées au cours de son exécution, dans le **pire des cas**.

- **opération élémentaire** = addition, soustraction, multiplication ou comparaison de deux bits
- **pire des cas**: le temps d'exécution peut en effet dépendre des données d'entrée.

## Approximation pour ce cours :

complexité temporelle = nombre d'**instructions** lues par l'algorithme au cours de son exécution (dans le pire des cas)

# Exemples

## Algorithme 1

Tant que  $1 > 0$  :  
Afficher "bonjour"

Comp. temp. infinie

## Algorithme 2

entrée :  $L$  liste de nombres,  $n$  taille de la liste  
sortie :  $m$  moyenne des  $n$  nombres de la liste

Information, Calcul et Communication

1  $m \leftarrow 0$   
Pour  $i$  allant de 1 à  $n$  :  
+  $n$   $m \leftarrow m + L(i)$   
+ 1 Sortir :  $m/n$

$m \leftarrow 0$   
 $i \leftarrow 1$   
Tant que  $i \leq n$   
 $m \leftarrow m + L(i)$   
 $i \leftarrow i + 1$   
Sortir  $m/n$

1  
+ 1  
+ 3 ·  $n$   
+ 1

" n "

$n + 2$

$3n + 3$

## Exemples

pire des cas = tous les éléments de  $L$  sont différents

Algorithme 3 (version légèrement modifiée de l'algorithme «Tous différents ?» )

entrée :  $L$  liste de nombres,  $n$  taille de la liste

sortie : *oui* ou *non*

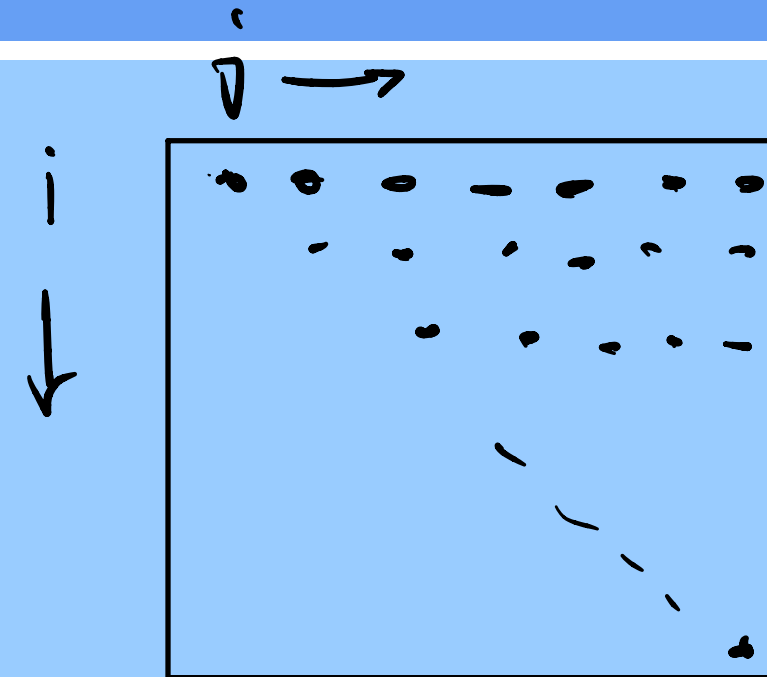
Pour  $i$  allant de 1 à  $n - 1$  :

  Pour  $j$  allant de  $i + 1$  à  $n$  :

    Si  $L(i) = L(j)$ , alors :

      Sortir : *non*

Sortir : *oui*



$$\underline{\underline{n^2}}$$

# instructions lues = nombre de paires  $(i, j)$  + 1

$$\begin{array}{ll} i=1 : & j=2 \dots n & n-1 \text{ éléments} \\ i=2 : & j=3 \dots n & n-2 \text{ éléments} \\ \vdots & & \vdots \\ i=n-1 : & j=n & 1 \end{array}$$

nb paires:

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 = n(n-1)/2$$

# Notation $\Theta(\cdot)$ : introduction

- En général, on évalue la complexité temporelle d'un algorithme en fonction d'un paramètre lié à la **taille des données d'entrée** (le paramètre  $n$  dans les deux exemples précédents).
- Pourquoi tant s'intéresser à cette complexité temporelle ? Voici un exemple concret:

Supposons qu'un algorithme prenne une minute pour s'exécuter avec des données d'entrée de taille  $n = 1'000$ . On aimerait savoir en combien de temps (au pire) s'exécutera ce même algorithme avec des données d'entrée de taille  $n = 10'000$ .

- Si on peut caractériser le nombre d'opérations effectuées par l'algorithme en fonction de  $n$  (comme par exemple pour l'algorithme 3 qui effectue  $\frac{n(n-1)}{2} + 1$  opérations lors de son exécution, dans le pire des cas), alors on peut répondre à la question ci-dessus.



# Notation $\Theta(\cdot)$ : définition

- Dans de nombreuses applications, on a affaire à des données d'entrée de **grande** taille.
- Dans ce cas, on aimerait obtenir des **ordres de grandeur** plutôt que de devoir faire des calculs détaillés.

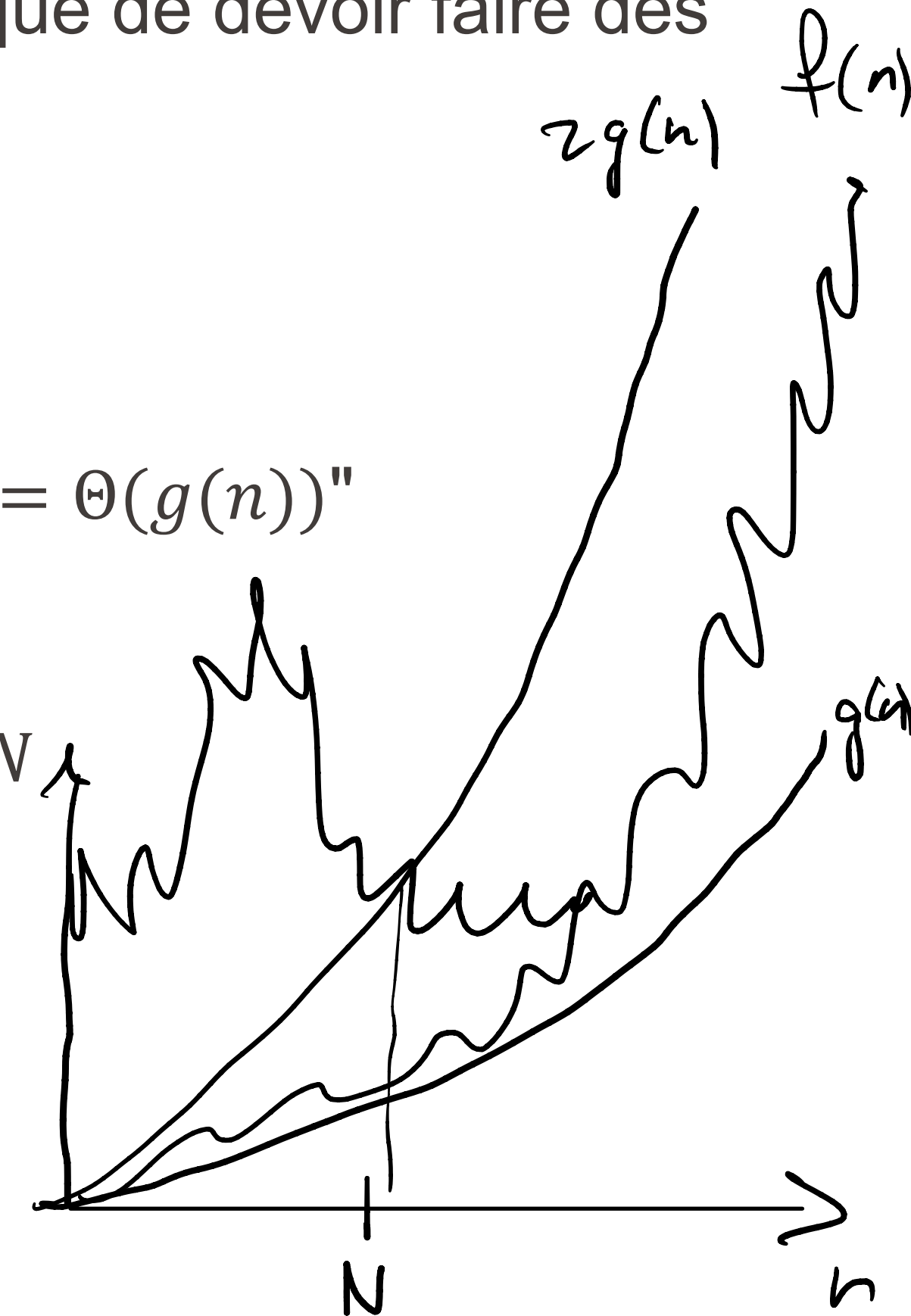
## Définition

Soient  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  deux fonctions non-négatives

On dit que " $f(n)$  est un **grand theta** de  $g(n)$ " et on écrit " $f(n) = \Theta(g(n))$ "

s'il existe  $0 < C_1 < C_2 < \infty$  et  $N \geq 1$  tels que

$$C_1 g(n) \leq f(n) \leq C_2 g(n) \quad \text{pour tout } n \geq N$$



# Notation $\Theta(\cdot)$ : définition

- Dans de nombreuses applications, on a affaire à des données d'entrée de **grande** taille.
- Dans ce cas, on aimerait obtenir des **ordres de grandeur** plutôt que de devoir faire des calculs détaillés.

## Définition

Soient  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  deux fonctions non-négatives

On dit que " $f(n)$  est un **grand theta** de  $g(n)$ " et on écrit " $f(n) = \Theta(g(n))$ "

s'il existe  $0 < C_1 < C_2 < \infty$  et  $N \geq 1$  tels que

$$C_1 g(n) \leq f(n) \leq C_2 g(n) \quad \text{pour tout } n \geq N$$

Contre-ex :

- $f(n) = n^2 \neq \Theta(n)$
- $f(n) = n \neq \Theta(n^2)$

Deux exemples :

- Les fonctions  $f(n) = n + 2$  et  $f(n) = 3n + 3$  sont toutes deux des  $\Theta(n)$  [cf. algorithme 2]

- La fonction  $f(n) = \frac{n(n-1)}{2} + 1$  est un  $\Theta(n^2)$  [cf. algorithme 3]

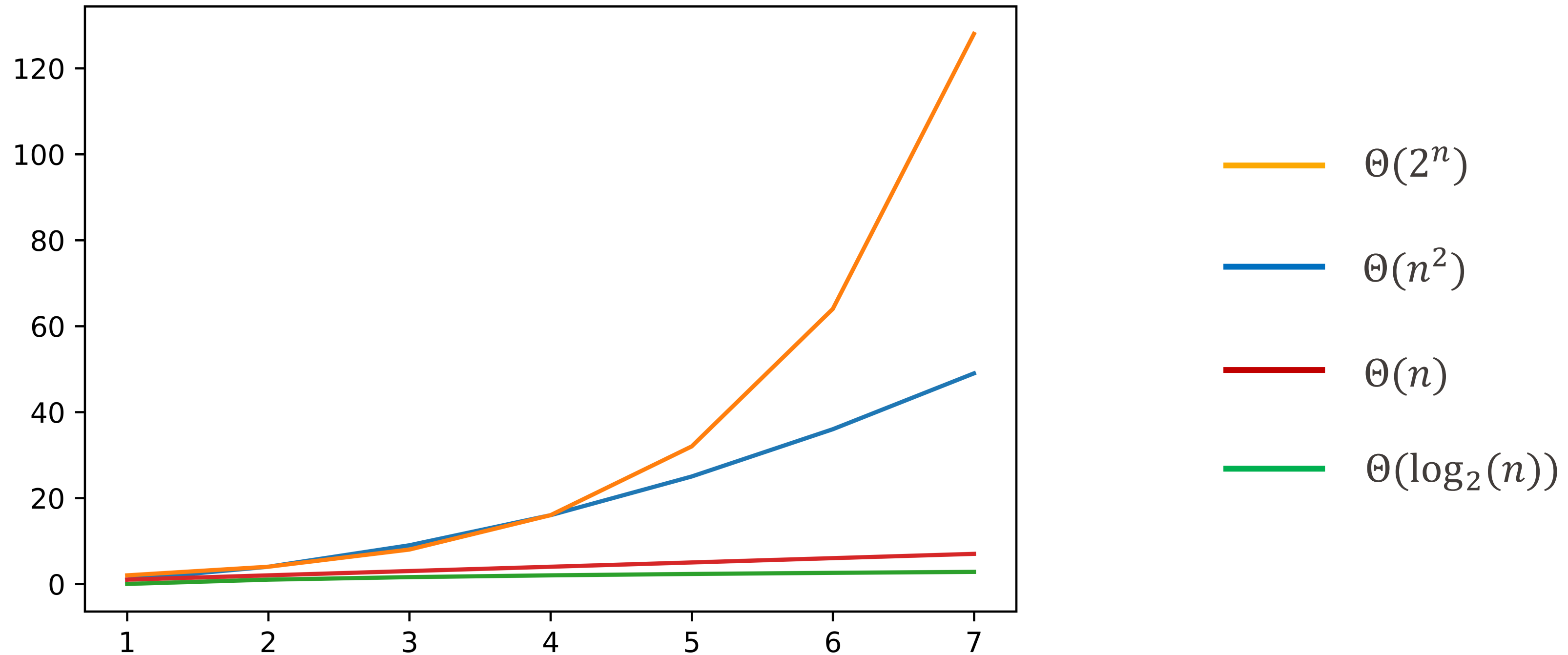
$$f(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1$$

# Notation $\Theta(\cdot)$ : application

- Revenons à notre exemple :

Supposons qu'un algorithme prenne une minute pour s'exécuter avec des données d'entrée de taille  $n = 1'000$ . On aimerait savoir en combien de temps (au pire) s'exécutera ce même algorithme avec des données d'entrée de taille  $n = 10'000$ .

- Si la complexité temporelle de cet algorithme est un  $\Theta(n)$ , alors son temps d'exécution avec  $n = 10'000$  en entrée vaudra (approximativement) 10 minutes.
- Si sa complexité temporelle est un  $\Theta(n^2)$ , alors son temps d'exécution avec  $n = 10'000$  en entrée vaudra (approximativement)  $10 \times 10 = 100$  minutes = 1 heure 40.



$n = 1'000$ :  $\log_2(n) \sim 10$ ,  $n = 1'000$ ,  $n^2 = 1'000'000$ ,  $2^n \sim 10^{300}$

## Calcul du nombre de paires d'éléments dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$

Pour calculer ce nombre, il existe plusieurs façons de faire :

- Utilisation de deux boucles imbriquées

→ complexité  $\Theta(n^2)$

- Utilisation d'une seule boucle

→ complexité  $\Theta(n)$  ( $\Theta(n \log n)$ )

- Utilisation de la formule mathématique

→ complexité  $\Theta(1)$  ( $\Theta(\log n)$ )

```
s ← 0
Pour i allant de 1 à n - 1 :
  Pour j allant de i + 1 à n :
    s ← s + 1
Sortir : s
```

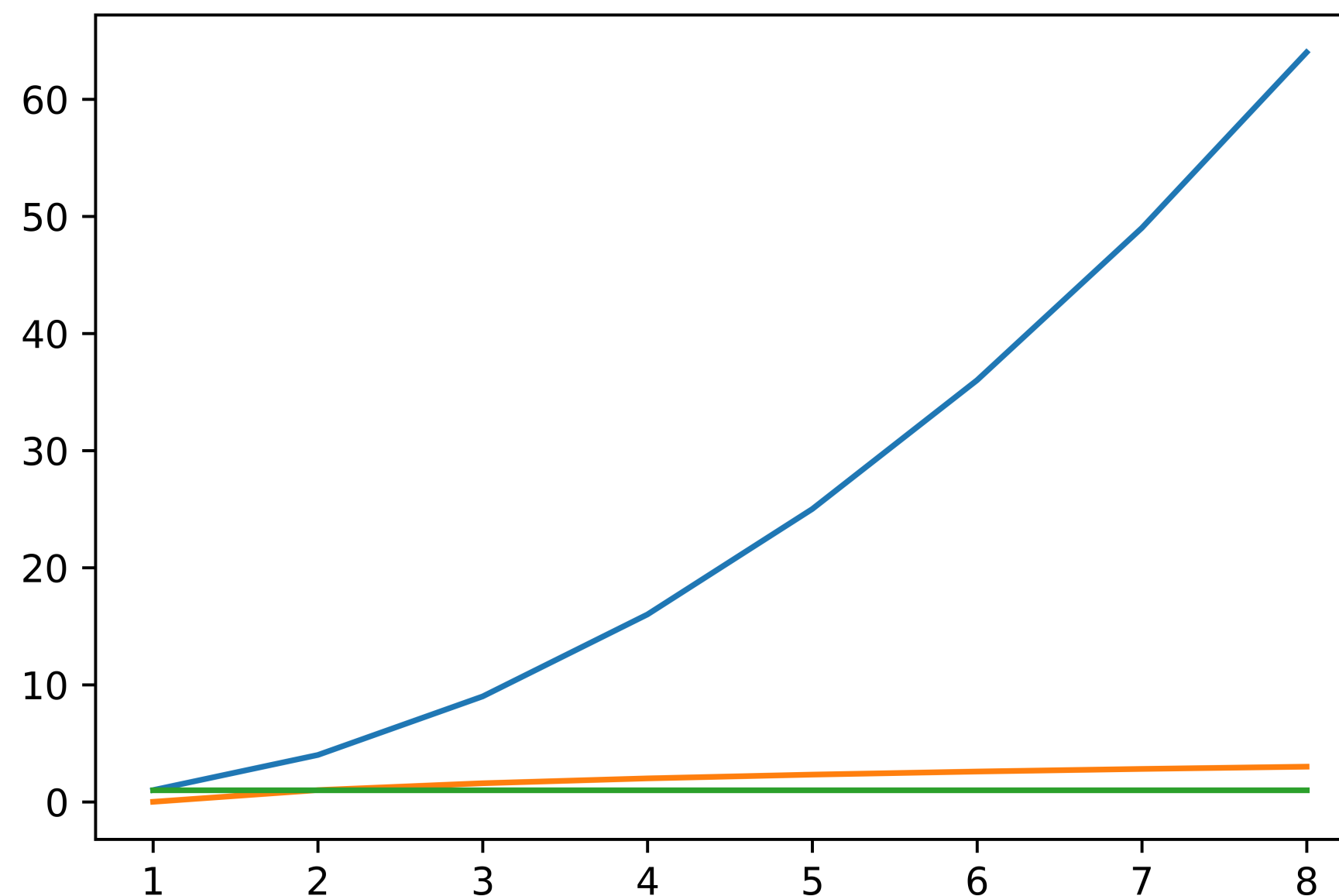
```
s ← 0
Pour i allant de 1 à n - 1 :
  s ← s + (n - i)
Sortir : s
```

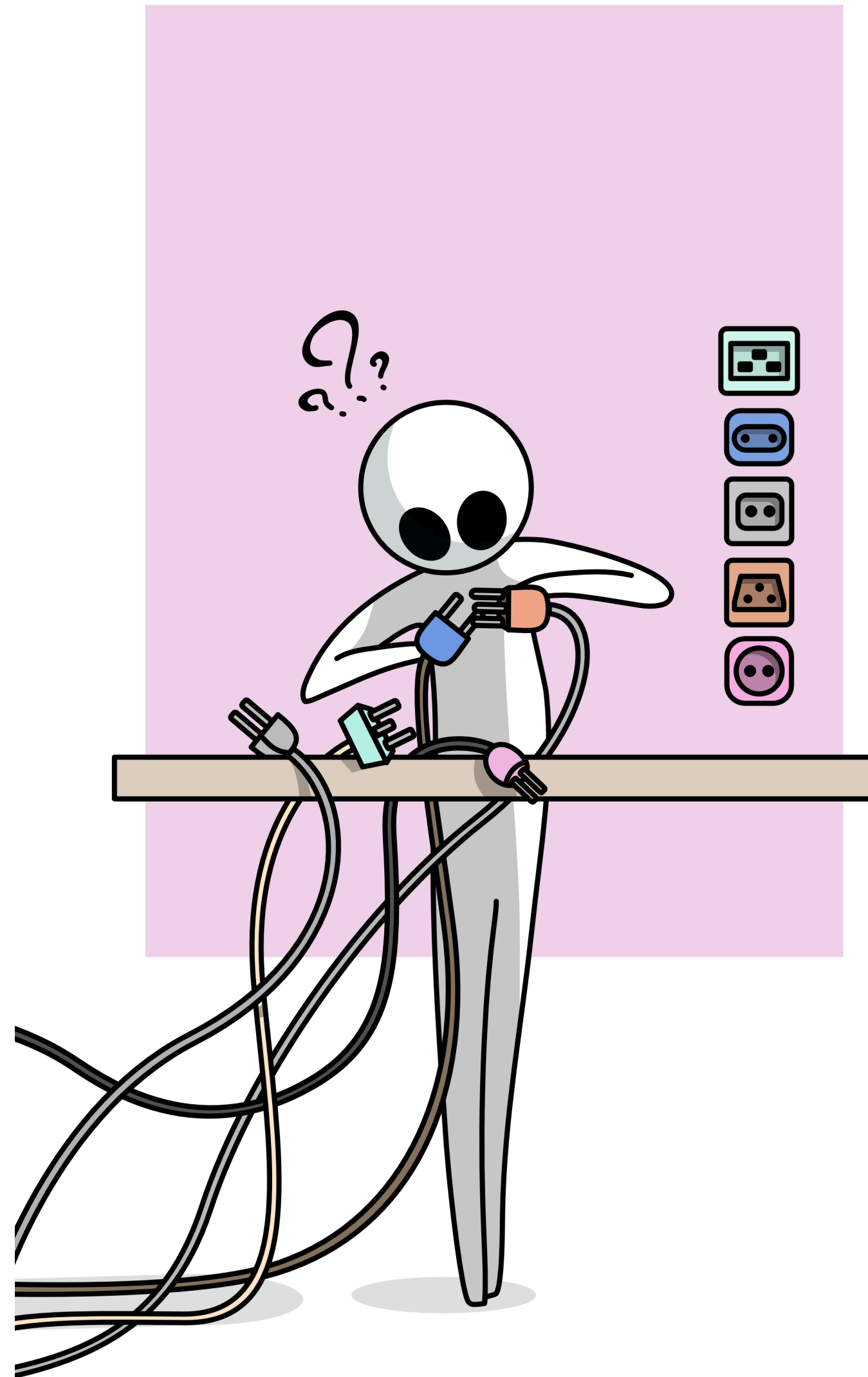
```
s ←  $\frac{n(n-1)}{2}$ 
Sortir : s
```

Calcul du nombre de paires d'éléments dans l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$

Pour calculer ce nombre, il existe plusieurs façons de faire :

- Utilisation de deux boucles imbriquées  
→ complexité  $\Theta(n^2)$
- Utilisation d'une seule boucle  
→ complexité  $\Theta(n)$
- Utilisation de la formule mathématique  
→ complexité  $\Theta(1)$





# Information, Calcul et Communication

Complexité temporelle :  
un (autre) exemple concret

Olivier Lévêque

# Deux font la paire



**Question :** Parmi toutes les fiches et prises ci-dessus, y a-t-il une paire qui s'adapte l'une à l'autre?



# Réécriture du problème avec des nombres entiers

En remplaçant les fiches et les prises par des nombres entiers positifs et négatifs, respectivement, la question précédente se transforme en :

- Etant donnée une liste  $L$  de  $n$  nombres entiers positifs et négatifs, existe-t-il  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $i < j$  et  $L(i) + L(j) = 0$  ?

**Exemple :** Si  $L = (-15, -12, -3, -1, +5, +17, +23)$ , alors la réponse est non.



liste ordonnée de nombres

# Réécriture du problème avec des nombres entiers

En remplaçant les fiches et les prises par des nombres entiers positifs et négatifs, respectivement, la question précédente se transforme en :

- Etant donnée une liste  $L$  de  $n$  nombres entiers positifs et négatifs, existe-t-il  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $i < j$  et  $L(i) + L(j) = 0$  ?

**Exemple** : Si  $L = (-15, -12, -3, -1, +5, +17, +23)$ , alors la réponse est non.

**Note** : Vu que nous avons affaire ici à des nombres entiers, nous allons supposer de plus que la liste  $L$  en entrée est *ordonnée*.

# Première méthode de résolution

Etant donnée une liste  $L$  de  $n$  nombres entiers positifs et négatifs, existe-t-il  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $i < j$  et  $L(i) + L(j) = 0$  ?

## Deux font la paire

entrée : liste ordonnée  $L$  de nombres entiers  
sortie : valeur binaire *oui / non*

$s \leftarrow \text{non}$

Pour  $i$  allant de 1 à  $n - 1$  :

    Pour  $j$  allant de  $i + 1$  à  $n$  :

        Si  $L(i) + L(j) = 0$ , alors :  $s \leftarrow \text{oui}$

Sortir :  $s$

# EPFL Complexité temporelle de cet algorithme: $\Theta(n^2)$

Les deux boucles imbriquées explorent toutes les paires possibles d'indices  $i < j$  dans  $\{1 \dots n\}$ , qui sont au nombre de

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n - 1)}{2}$$

donc la complexité temporelle de l'algorithme est  $\Theta(n^2)$ .

**Question :** Peut-on faire mieux ?

# Deuxième méthode de résolution

## Deux font la paire

entrée : liste ordonnée  $L$  de nombres entiers  
sortie : valeur binaire *oui / non*

Pour  $i$  allant de 1 à  $n - 1$  :  
  Pour  $j$  allant de  $i + 1$  à  $n$  :  
    Si  $L(i) + L(j) = 0$ , alors : Sortir : *oui*  
  Sortir : *non*

→ Complexité temporelle  $\Theta(n^2)$  également : dans le pire des cas, l'algorithme doit parcourir toutes les paires  $(i, j)$  avant de sortir.

$$L = (-13, -12, -5, -4, +3, +8, +15)$$

# Deuxième méthode de résolution

## Deux font la paire

entrée : liste ordonnée  $L$  de nombres entiers

sortie : valeur binaire *oui / non*

Pour  $i$  allant de 1 à  $n - 1$  :

    Pour  $j$  allant de  $i + 1$  à  $n$  :

        Si  $L(i) + L(j) = 0$ , alors : Sortir : *oui*

Sortir : *non*

→ Complexité temporelle  $\Theta(n^2)$  également : dans le pire des cas, l'algorithme doit parcourir toutes les paires  $(i, j)$  avant de sortir.

### Remarque :

Aucun des deux algorithmes précédents n'exploite **l'ordre** de la liste  $L$ .

$$L = \left( \underbrace{-13, -12, -5, -4}_{1 \quad \quad \quad k} \mid \underbrace{+3, +7, +17}_n \right)$$

$i \leftarrow 1$   
 Tant que  $L(i) < 0$  &  $i \leq n$ :  $\Theta(n)$   
      $i \leftarrow i + 1$   
      $k \leftarrow i - 1$   
 Pour  $i$  allant de 1 à  $k$   
     Pour  $j$  allant de  $k + 1$  à  $n$   
         Si  $L(i) = L(j)$ , sortir ou  $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \Theta(n^2)$   
 Sortir ou

$$L = (-13, -12, -5, -4, +3, +7, +17)$$

$\uparrow$                      $\uparrow$                      $\uparrow$                      $\uparrow$   
 $i=1$                      $i=2$                      $j=n-1$                      $j=n$

$\leftarrow \rightarrow$                      $\leftarrow \rightarrow$

- $L(i) + L(j) = 0$  ?  $aci \rightarrow \text{satır } aci$
- $L(i) + L(j) > 0$  ?  $j \leftarrow j-1$
- $L(i) + L(j) < 0$  ?  $i \leftarrow i+1$



# Troisième méthode de résolution

## Deux font la paire

entrée : liste ordonnée  $L$  de nombres entiers

sortie : valeur binaire *oui / non*

$i \leftarrow 1$

$j \leftarrow n$

Tant que  $i < j$  :

Si  $L(i) + L(j) = 0$ , alors : Sortir : *oui*

Si  $L(i) + L(j) < 0$ , alors :  $i \leftarrow i + 1$

Si  $L(i) + L(j) > 0$ , alors :  $j \leftarrow j - 1$

Sortir : *non*

→ Complexité temporelle de ce dernier algorithme:  $\Theta(n)$  (une seule boucle !)

- Pour un problème donné, il existe souvent *plusieurs* algorithmes de résolution différents.
- En général, des données d'entrée *structurées* permettent une résolution *plus efficace* du problème.