

Série 23

Exercice 1. Détermine le domaine de définition des fonctions réelles suivantes :

- | | | |
|--|---|---|
| a) $f(x) = \cot(x)$ | e) $f(x) = \frac{x^4 + x^2 + x}{x^2 + x}$ | i) $f(x) = \arctan(x)$ |
| b) $f(x) = \frac{\tan(x)}{\sin(x)}$ | f) $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x + 1}$ | j) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)$ |
| c) $f(x) = \frac{\tan(x)}{\cos(x)}$ | g) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2 + 1}$ | k) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1}}$ |
| d) $f(x) = \tan\left(\frac{1}{x}\right)$ | h) $f(x) = \tan(3x/2)$ | l) $f(x) = x^{2/3}$ |
| | | m) $f(x) = x^{m/n} \quad (m, n \in \mathbb{N}^*)$ |

Exercice 2. Détermine si les fonctions suivantes sont paires ou impaires.

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| a) $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$ | e) $f(x) = 3 \cos^2(x) + 7 \sin(x^2)$ |
| b) $f(x) = x^5 - x^3 + \sin(x)$ | f) $f(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$ |
| c) $f(x) = \cos(x) + x^{16}$ | g) $f(x) = \frac{x}{ x }$ |
| d) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ | |

Exercice 3. Détermine toutes les fonctions qui sont à la fois paires et impaires.

Exercice 4. On considère une fonction réelle f définie sur \mathbb{R} .

- a) Étudie la parité de la fonction $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par la formule $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$.
- b) Étudie la parité de la fonction $i = f - p$.
- c) Dédus des deux parties précédentes que toute fonction f peut être écrite comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- d) Trouve une telle décomposition pour $f(x) = 7x^5 - 3x^4 + 6x^2 + 4x - 9$ et $g(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})$.

Exercice 5. Symétrie. Démontre les équivalences suivantes :

- a) La fonction f admet un axe de symétrie $x = a$ si et seulement si la fonction $g(x) = f(x + a)$ est paire.
- b) La fonction f admet une symétrie de centre $(a; b)$ si et seulement si la fonction $g(x) = f(x + a) - b$ est impaire.

Exercice 6.

- a) Démontre que la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ admet la droite $x = 2$ pour axe de symétrie.
- b) Démontre que la fonction $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$ admet le point $(-1; 4)$ pour centre de symétrie.
- c) Démontre que la fonction $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$ admet le point $(3; 2)$ pour centre de symétrie.
- d) Démontre que la fonction $f(x) = \frac{4x^2 + 8x + 3}{x^2 + 2x - 3}$ admet la droite $x = -1$ pour axe de symétrie.

Exercice 7. Vrai ou faux ? Dans chaque cas justifie ta réponse ! On considère deux fonctions paires f et g et une fonction impaire h .

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) La somme $f + h$ est paire. | f) Le carré $(f + h)^2$ est pair. |
| b) La somme $f + g$ est paire. | g) La somme $(f^2 + h^2)$ est paire. |
| c) Le quotient f/h est pair. | h) La fonction $x \mapsto \sin(f(x))$ est paire. |
| d) La valeur absolue $ h $ est paire. | i) La fonction $x \mapsto \cos(f(x))$ est paire. |
| e) La valeur absolue $ f $ est paire. | j) La fonction $x \mapsto \sin(h(x))$ est impaire. |

Exercice 8. [Composition, injectivité, et surjectivité.] Soient $f : D \rightarrow E$ et $g : C \rightarrow D$ deux fonctions. Démontre les affirmations suivantes :

- a) Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.
 b) Si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.
 c) Dans le cas où $C = E$, on a [$f \circ g = \text{Id}$ et $g \circ f = \text{Id}$] si et seulement si [f est bijective et $f^{-1} = g$].
 (Ici, Id dénote la fonctions identité.)

Les réciproques de **a)** et **b)** sont-elles vraies ?

Exercice 9. Détermine le maximum, le minimum, le supremum et l'infimum des fonctions suivantes, lorsqu'ils existent. Fais bien attention au domaine de définition !

- | | |
|--|---|
| a) $f :] - \pi/2; \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$ | c) $f : [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3 + 1$ |
| b) $f : [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$ | d) $f : [0; 2[\rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \lfloor x \rfloor$ |

Exercice 10. Trouve le maximum et le minimum de la fonction $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = |x^2 - x| + |x|$$

Indication. Essaie de décrire la fonction f sans utiliser les valeurs absolues, mais au prix de devoir utiliser des expressions différentes sur plusieurs intervalles.

Exercice 11. On considère la fonction

$$f : [0; 1] \rightarrow [0; 1] \\ x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$$

Vérifie que cette fonction est bijective et détermine son inverse.

Exercice 12. Détermine si la fonction suivante est bijective.

$$f : \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \rightarrow [1; 3] \\ x \mapsto \sin(x) + 2$$

Montre ensuite que les restrictions $f' : \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \rightarrow [1; 3]$ et $f'' : \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \rightarrow [1; 3]$ de f sont bijectives, et détermine leurs inverses.

Exercice 13. Soit r un nombre rationnel. Donne la réciproque de la fonction x^r . N'oublie pas de donner les ensembles de définition.

Ensemble de définition, image et graphe.

- Une fonction réelle est une application f d'un sous-ensemble D de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On appelle D l'**ensemble de définition** de f (ou le **domaine de définition** de f) et on le note aussi D_f ou $D(f)$. On écrit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ pour indiquer que f est une application qui à tout élément de D associe un nombre réel.
- L'**image** de f est $f(D) := \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D \text{ avec } f(x) = y\}$. On peut alors écrire une fonction réelle comme $f : D \rightarrow E$, où E est n'importe quel sous-ensemble de \mathbb{R} qui contient l'image de f . Dans ce cas, l'ensemble E est appelé l'**ensemble d'arrivée** de f .
- Le **graphe** d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 défini par

$$G(f) = \{(x; f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D\}$$

Pour autant que cela ne prête pas à confusion, on écrira abusivement f plutôt que $G(f)$.

Injectivité et surjectivité.

- Une fonction $f : D \rightarrow E$ est **injective** si deux points distincts ont des images distinctes, c'est-à-dire si $x \neq y$ implique $f(x) \neq f(y)$ pour tout $x, y \in D$.
- Une fonction $f : D \rightarrow E$ est **surjective** si tout élément de E est l'image d'un élément de D .
- Enfin, une fonction $f : D \rightarrow E$ est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, ou, en d'autres termes, si tout point de E est l'image d'un unique point de D .

Remarque. Une fonction réelle $f : D \rightarrow E$ est injective si et seulement si toute droite horizontale de \mathbb{R}^2 (intersectant Oy en un point de E) coupe le graphe de f en au plus un point. Une fonction réelle $f : D \rightarrow E$ est surjective si et seulement si toute droite horizontale de \mathbb{R}^2 (intersectant Oy en un point de E) coupe le graphe de f en au moins un point.

Préimage et fonction réciproque.

- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $S \subset \mathbb{R}$. La **préimage** par f de S est l'ensemble $f^{-1}(S) \subset D$ des points de D dont l'image se trouve dans S :

$$f^{-1}(S) = \{x \in D \mid f(x) \in S\}$$

- Lorsque $f : D \rightarrow E$ est bijective on utilise aussi la notation $f^{-1} : E \rightarrow D$ pour la **fonction réciproque** qui à tout élément $y \in E$ associe le seul point dans la préimage $f^{-1}(\{y\})$. Autrement dit, f^{-1} est la fonction qui envoie y sur l'unique point $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.
(La fonction f^{-1} est souvent appelée fonction **inverse** de f au lieu de **réciproque** de f .)

Remarque. Pour une fonction bijective f , nous avons

$$G(f) = \{(x; y) \mid x \in D(f) \text{ et } y = f(x)\}$$

et

$$G(f^{-1}) = \{(y; f^{-1}(y)) \mid y \in f(D(f))\} = \{(y; x) \mid x \in D(f) \text{ et } y = f(x)\}$$

En d'autres termes, pour tout point $(x; y)$ du graphe de f , le point $(y; x)$ appartient au graphe de f^{-1} . Par conséquent le graphe $G(f^{-1})$ est l'image de $G(f)$ par une symétrie axiale d'axe $x = y$.

Symétries du graphe.

- Soit D un sous-ensemble de \mathbb{R} tel que si $x \in D$ alors $-x \in D$.
Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D$. Dans ce cas, l'axe Oy sera un axe de symétrie du graphe de f .
Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D$. Dans ce cas, l'origine O sera un centre de symétrie du graphe de f .
- Plus généralement, soit D un sous-ensemble de \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R}$ tels que si $x + a \in D$ alors $-x + a \in D$. La droite verticale $x = a$ sera un axe de symétrie du graphe de la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ si pour tout $x + a \in D$,

$$f(x + a) = f(-x + a)$$

Le point $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ est un centre de symétrie du graphe de la fonction f si pour tout $x + a \in D$,

$$f(x + a) - b = -f(-x + a) + b$$

Majorants, minorants, supremum, infimum, maximum et minimum d'une fonction.

- Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est **majorée** sur D s'il existe un nombre réel M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in D$, autrement dit, l'image $f(D)$ de f est un sous-ensemble majoré de \mathbb{R} .
- Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est **minorée** sur D si $f(D)$ est un sous-ensemble minoré de \mathbb{R} .
- La **borne supérieure** (ou **supremum**) d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est, si elle existe, la borne supérieure de l'ensemble $f(D)$. En d'autres termes, la borne supérieure de f est, si elle existe, le plus petit des majorants de $f(D)$. Bien souvent, une borne ne fait pas partie de l'image de la fonction, de même que la borne d'un sous-ensemble n'en fait pas forcément partie.
- La **borne inférieure** (ou **infimum**) d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est, si elle existe, la borne inférieure de l'ensemble $f(D)$. La borne inférieure de f est donc, si elle existe, le plus grand des minorants de $f(D)$.
- Le **maximum** d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est un majorant M de la fonction tel qu'il existe un $x \in D$ avec $f(x) = M$. On le note $\max(f)$ ou $\max_D(f)$ pour indiquer qu'on considère l'ensemble de définition.
- Le **minimum** d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est un minorant m de f tel qu'il existe un $x \in D$ avec $f(x) = m$. On le note $\min(f)$ ou $\min_D(f)$.