



Cours Euler

Module 4

Intégration

I. L'invention du calcul intégral

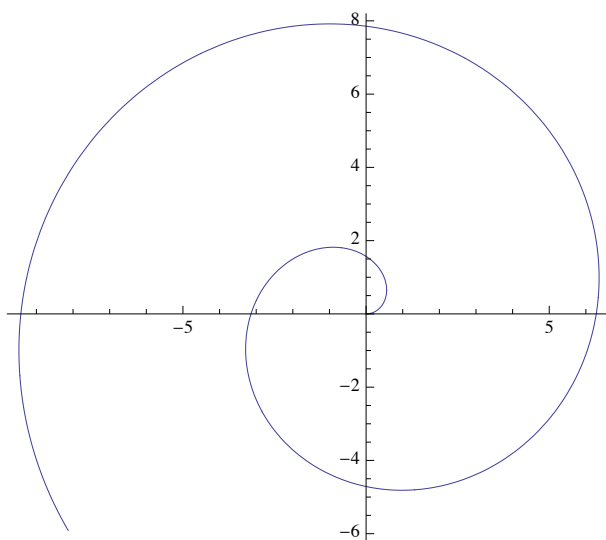
Le calcul intégral représente l'une des grandes révolutions mathématiques. On associe souvent son nom à celui de Bernhard Riemann (1826-1866), même si les idées et les concepts qui ont été nécessaire se trouvent déjà chez Cauchy (1823), Leibniz et Newton (1675), Cavalieri (1640), Kepler (1615) et ... Archimède! Nous commencerons donc notre étude avec un exemple de ce scientifique grec de Syracuse (-250).

1 La spirale archimédienne

On considère la courbe du plan donnée en coordonnées polaires par l'équation

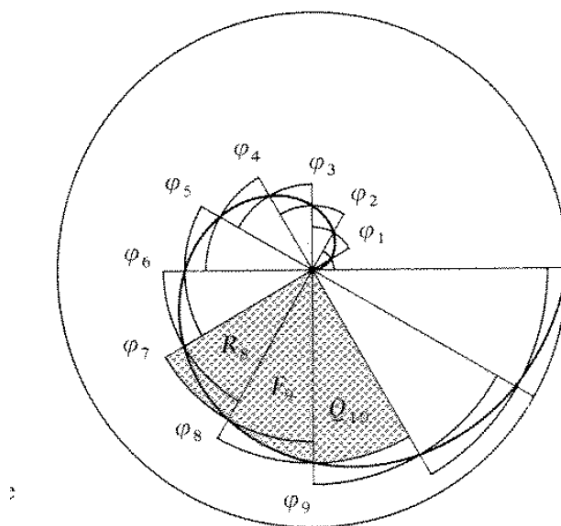
$$r = \varphi,$$

pour un angle $0 \leq \varphi \leq \alpha$ où α est un angle positif fixé, ce sera 2π tout à l'heure, et r est la distance au centre.



Pour calculer l'aire de la surface comprise entre la spirale et le rayon d'angle α , Archimède découpe l'angle α en n angles égaux $\delta = \alpha/n$. Il approche l'aire cherchée par une somme de secteurs de disque. Pour $1 \leq k \leq n$, il considère le rayon $\varphi = k\delta$ et son intersection avec la spirale. Soit A_k l'aire de la surface délimitée par la spirale et les rayons $\varphi = (k-1)\delta$ et $\varphi = k\delta$.

Ainsi l'aire A cherchée est comprise entre deux sommes de petits et grands secteurs de disque :



Nous avons un peu plus de technique à notre disposition qu'Archimède et pensons à utiliser le théorème des deux gendarmes. Lorsque n tend vers l'infini, les deux sommes tendent vers la même limite $\alpha^3/6$. Ce résultat se montre par un petit raisonnement par récurrence à faire en exercice.

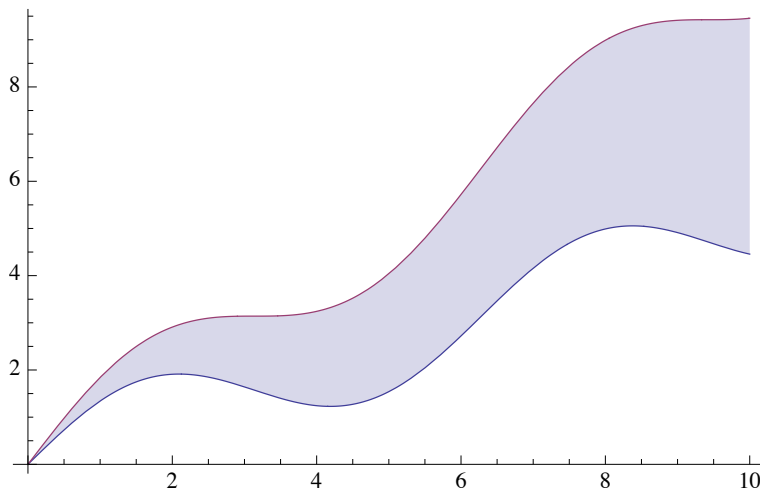
Proposition 1.1. *L'aire de la surface comprise entre la spirale d'Archimède et le rayon d'angle 2π vaut $\frac{4\pi^3}{3}$, soit exactement le tiers de l'aire du cercle de rayon 2π .*

Démonstration. La valeur de l'aire est donnée par la formule que nous avons trouvée ci-dessus pour $\alpha = 2\pi$.

□

Après les calculs d'Archimède d'aire et de volume, dont celui de la boule par exemple, il faut attendre environ 1800 ans pour que de nouveaux résultats voient le jour. Kepler publie en 1615 un article sur le volume d'un tonneau de vin. Sa méthode consiste à découper le volume en morceaux "infinitésimaux" et calculer la limite. Cavalieri, un élève de Galilée, rend ces méthodes plus systématiques et conceptualise l'idée de voir une surface comme une union infinie de segments, de même qu'un segment est une union infinie de points. Il est soutenu par Pascal, alors que d'autres dénigrent ses méthodes.

Exemple 1.2. Quelle est l'aire de la surface délimitée par les graphes des fonctions f et g définies algébriquement par $f(x) = \sin x + \frac{x}{2}$ et $g(x) = \sin x + x$ pour des valeurs $0 \leq x \leq 10$?



Cavalieri raisonnait ainsi : chaque segment vertical d'abscisse x est de longueur $x/2$. Ainsi l'aire de la surface cherchée est la même que celle de la surface

Newton et Leibniz sont les pères du calcul intégral, terminologie introduite en 1696 par Jakob Bernoulli. Mais les fondements théoriques seront développés par Cauchy, qui le premier se rend compte de la nécessité d'une démonstration de l'existence de l'intégrale, et complétés par Riemann.



Né en 1826 à Breselenz, un village dans le royaume de Hanovre, dans l'actuelle Allemagne, Riemann étudie d'abord à l'université de Göttingen où Gauss dirigera sa thèse. Il meurt de tuberculose au cours d'un voyage en Italie, à l'âge de 39 ans. Ses contributions aux mathématiques sont énormes. On parle aujourd'hui encore de surfaces de Riemann, d'intégrale de Riemann - que nous verrons tout à l'heure. La célèbre conjecture de Riemann sur la fonction ζ est l'un des problèmes de Hilbert (1900) et l'un des sept problèmes du millénaire mis au concours par l'institut Clay pour un million de dollars...

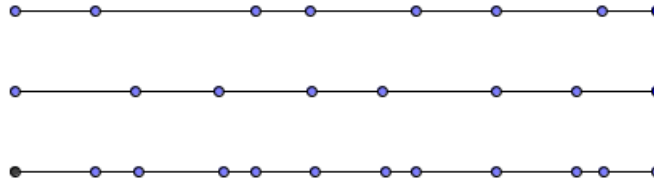
2 Les sommes de Darboux

Jean Gaston Darboux (1842-1917) est un mathématicien français. Nous présentons ici sa méthode d'intégration en analyse. Nous travaillons avec une fonction réelle bornée définie sur un intervalle $[a, b]$ et cherchons à calculer l'aire de la surface comprise entre l'intervalle $[a, b]$ sur l'axe Ox et le graphe de la fonction, lorsque cela est possible !

Définition 2.1. Une *subdivision* σ de l'intervalle $[a, b]$ est la donnée de nombres réels ordonnés $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

La subdivision $a, a + \frac{b-a}{n}, \dots, a + k\frac{b-a}{n}, \dots, a + (n-1)\frac{b-a}{n}, b$ est appelée *subdivision régulière d'ordre n* .

Si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions du même intervalle $[a, b]$, on note $\sigma_1 \cup \sigma_2$ la nouvelle subdivision obtenue par la réunion des deux subdivisions :



Le *pas* d'une subdivision σ est la plus grande distance entre deux points successifs de la subdivision, c'est-à-dire le nombre réel $\max\{x_i - x_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Le pas de la subdivision régulière d'ordre n de l'intervalle $[0, 1]$ vaut $1/n$.

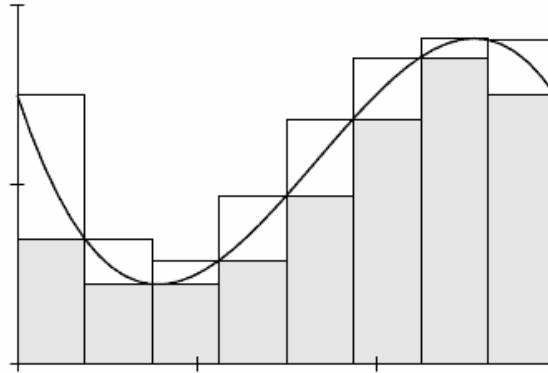
Définition 2.2. Soit σ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur $[a, b]$ et bornée.

On définit alors la *somme de Darboux inférieure* $s_\sigma(f)$ et la *somme de Darboux supérieure* $S_\sigma(f)$ par

On pose encore m la borne inférieure de la fonction f sur $[a, b]$ et M sa borne supérieure.

Remarque 2.3. Les nombres m_i et M_i existent puisque la fonction f est bornée (nous avons vu que les nombres réels possèdent cette propriété, alors que $\mathbb{Q}$ non). Lorsque la fonction f est aussi continue sur $[a, b]$, la borne supérieure est

On visualise sur l'illustration suivante le rapport entre les sommes de Darboux et l'aire de la surface comprise entre l'axe horizontal et le graphe de la fonction.



Lemme 2.4. Soit σ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur $[a, b]$ et bornée. Alors

$$m(b-a) \leq s_\sigma(f) \leq S_\sigma(f) \leq M(b-a)$$

3 Les fonctions intégrables

Le lemme précédent est une évidence puisque $m \leq m_i \leq M_i \leq M$ pour tout i , mais il nous permet d'affirmer que la borne supérieure $s(f)$ de toutes les sommes de Darboux inférieures existe et que la borne inférieure $S(f)$ de toutes les sommes de Darboux supérieures existe aussi (on calcule ces bornes sur toutes les subdivisions possibles de l'intervalle $[a, b]$).

Lemme 3.1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur $[a, b]$ et bornée. Alors $s(f) \leq S(f)$.

Démonstration. Nous allons montrer que toute somme de Darboux inférieure est plus petite ou égale que toute somme de Darboux supérieure.

Considérons en effet deux subdivisions σ_1 et σ_2 , ainsi que la réunion $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Alors

□

Définition 3.2. Une fonction réelle bornée $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est *intégrable* sur $[a, b]$ si $s(f) = S(f)$.

Dans ce cas, on pose $\int_a^b f(x)dx = s(f) = S(f)$ et on appelle ce nombre réel l'*intégrale définie* de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.

Exemple 3.3. Soit la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1$ pour tout $x > 0$. Cette fonction

La plupart des fonctions que nous intégrerons seront continues.

Proposition 3.4. *Toute fonction réelle continue définie sur $[a, b]$ est intégrable.*

Démonstration. Nous devons montrer que $s(f) = S(f)$. Puisque $s(f) \leq S(f)$ par le dernier lemme, il suffit de montrer que $\forall \varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ telle que $S_\sigma(f) - s_\sigma(f) \leq \varepsilon$.

La démonstration utilise le fait qu'une fonction continue sur un intervalle fermé est *uniformément continue* : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que, si $|x - y| < \delta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (indépendamment de x ou y). Ainsi, si l'on choisit une suite régulière de pas $< \delta$, on voit que $M_i - m_i < \varepsilon$, si bien que la différence entre les sommes de Darboux supérieure et inférieure est plus petite que $(b - a)\varepsilon$. Cette quantité est arbitrairement petite... $\square$

D'après la définition d'intégrabilité, il faudrait utiliser toutes les subdivisions de $[a, b]$.

Riemann a montré qu'il suffit de travailler avec les subdivisions régulières. L'idée est que pour toute subdivision, il en existe une régulière qui est plus "fine" (dont le pas est plus petit).

Proposition 3.5. Intégrabilité au sens de Riemann

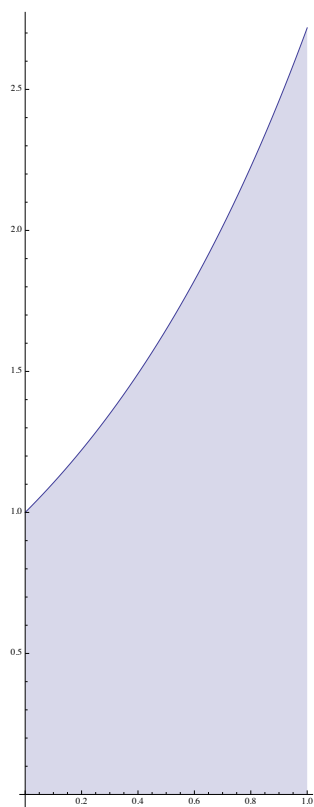
Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et σ_n une suite de subdivisions dont le pas tend vers zéro. Alors si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\sigma_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\sigma_n}(f),$$

la fonction f est intégrable et la limite ci-dessus est $\int_a^b f(x)dx$.

Exemple 3.6. La fonction exponentielle est continue sur $[0, 1]$, donc intégrable.

Pour calculer $\int_0^1 e^x dx$, il suffit donc de calculer la limite des sommes de Darboux inférieures prises sur les subdivisions régulières $\sigma_n : 0 < 1/n < \dots < i/n < \dots < 1$.



II. Intégrales définies et indéfinies

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit les sommes de Darboux et la notion d'intégrabilité au sens de Riemann. Ainsi, l'intégrale *définie* d'une fonction bornée, la plupart du temps continue, et intégrable sur un intervalle est un nombre qui mesure l'aire de la surface comprise entre l'axe Ox et le graphe de la fonction. Notre but aujourd'hui est d'établir quelques propriétés élémentaires de l'intégrale définie, puis, en considérant l'intégrale définie comme une fonction de ses bornes d'intégration, de retrouver la notion de primitive, ou d'intégrale indéfinie. Ceci nous permettra alors de développer de puissantes techniques d'intégration, plus agréables à manier que les calculs de limites de sommes de Darboux !

1 L'intégrale en fonction de ses bornes

Avant de passer à l'un des résultats les plus importants de ce jour, nous énonçons un lemme, dont la preuve est évidente par l'interprétation géométrique de l'intégrale de Riemann.

Lemme 1.1. *Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a < c < b$. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Pour que cette formule soit aussi valable lorsque $c \notin [a; b]$, on définit $\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$.

Par conséquent, $\int_a^a f(x)dx =$

Nous aurons aussi besoin de comparer les intégrales définies de fonctions "comparables".

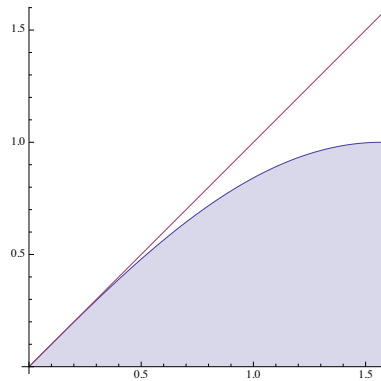
Lemme 1.2. *Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $a \leq x \leq b$. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Démonstration. Comme f et g sont continues, elles sont intégrables. Pour comparer les valeurs de leurs intégrales, nous utilisons le calcul de l'intégrale définie par les sommes de Darboux supérieures.

□

Exemple 1.3. On se souvient que $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$. On en déduit que



En ce moment, nous ne savons pas encore calculer l'aire grisée sur l'illustration ci-dessus, mais, patience, dans une petite heure ce sera chose faite.

D'autres résultats sont évidents du point de vue géométrique, alors qu'ils sont durs à comprendre analytiquement. La linéarité de l'intégrale est fastidieuse à démontrer avec la définition de Riemann, mais facile avec le Théorème fondamental du calcul intégral que nous verrons tout à l'heure.

Voici une liste non exhaustive et sans preuve de propriétés d'intégrabilité.

Proposition 1.4. Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors les propriétés suivantes sont vraies :

- a) les fonctions f^2 , $f^+ = \max\{f, 0\}$ et $f^- = \max\{-f, 0\}$ sont intégrables ;
- b) les fonctions $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $f + g$ et $f \cdot g$ sont intégrables ;
- c) s'il existe $\delta > 0$ tel que $g(x) \geq \delta$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont intégrables.

L'idée pour montrer que f^2 est intégrable serait de voir que sur $[a, b]$, si la différence entre la somme de Darboux inférieure et supérieure pour f est plus petite que ε , alors la différence pour f^2 est inférieure à $(a^2 + b^2)\varepsilon$.

Comme ε peut être rendu arbitrairement petit, la quantité $(a^2 + b^2)\varepsilon$ aussi...

Remarque 1.5. Attention ! Le fait que f^2 est intégrable ne veut pas dire que l'intégrale du carré d'une fonction est égale au carré de l'intégrale de cette fonction. En fait, ce n'est vrai que dans des cas très particuliers.

Construisons un contre-exemple élémentaire, pour lequel les intégrales sont facilement calculables :

2 Le Théorème fondamental

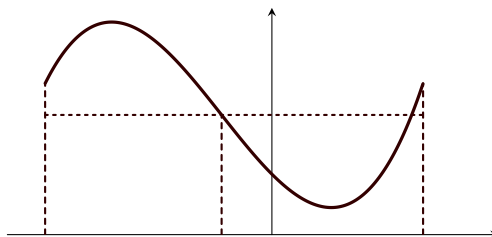
Rappel : **Théorème de la valeur intermédiaire**

Théorème 2.1. Théorème de la moyenne. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors il existe un élément c de $[a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a).$$

En d'autres termes, l'aire de la surface comprise entre l'axe Ox et le graphe de f est égal à l'aire du rectangle de base $[a, b]$ et de hauteur $f(c)$:



Démonstration. Définissons m le minimum de la fonction f sur $[a, b]$ et M son maximum. Comme $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x , on a que

□

Ce théorème apparemment anodin va nous permettre de faire le lien avec le calcul des primitives. Si f est une fonction définie et continue sur $[a, b]$, une *primitive* de f est une fonction continue $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dont la dérivée est f , c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$ pour tout $a < x < b$. Puisque les seules fonctions continues dont la dérivée est nulle sont les fonctions constantes, nous avons vu que deux primitives de f diffèrent toujours d'une constante. Autrement dit, si l'on trouve une primitive $F(x)$, on les connaît toutes ; elles seront toutes de la forme $F(x) + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f sur $[a, b]$.

Démonstration. Soit x_0 un nombre fixé dans $]a, b[$. Nous allons démontrer que $F'(x_0) = f(x_0)$ en appliquant la définition de la dérivée. Calculons donc à l'aide du lemme 1.1

Remarquons que cette formule ne dépend pas du fait que $x > x_0$, puisque les deux signes négatifs qui apparaissent lorsque $x < x_0$ se compensent. D'autre part, lorsque x tend vers x_0 , $c(x)$ tend aussi vers x_0 car il est compris entre x et x_0 . Par conséquent,

Il reste à montrer que F est continue à droite en a et à gauche en b . Nous nous occuperons seulement de la première affirmation. La deuxième est similaire.

Par définition de F , on a $F(a) = 0$. Par ailleurs, si $x > a$, il existe $d(x)$ entre a et x tel que

$$F(x) = F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt = f(d(x)) \cdot (x - a).$$

Soit m le minimum et M le maximum de la fonction f .

□

La démonstration du théorème fondamental du calcul intégral se fait en trois lignes maintenant !

Théorème 2.3. Théorème fondamental du calcul intégral. *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et G une primitive de f sur $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

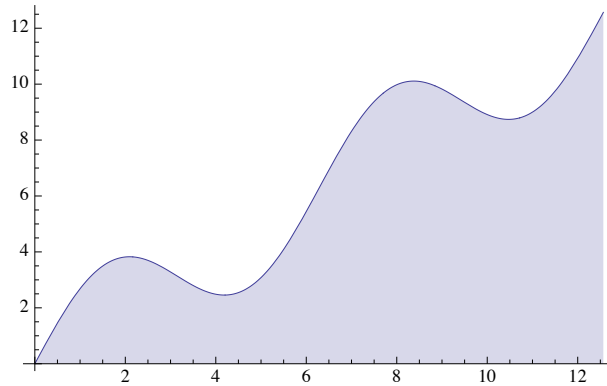
Démonstration.

□

Exemple 2.4. Quelle est l'aire de la surface délimitée par l'axe Ox et le graphe de la fonction donnée par $f(x) = 2 \sin x + x$ pour $0 \leq x \leq 4\pi$?

Il n'est pas nécessaire de calculer des sommes de Darboux ; il nous suffit simplement de trouver une primitive de $f(x) = 2 \sin x + x$. Le choix évident est

Le Théorème fondamental du calcul intégral nous permet de calculer



On notera souvent $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$ ou $[F(x)]_a^b$.

Remarque 2.5. Attention ! Ce n'est parce que l'intégrale définie d'une fonction permet de construire une primitive de cette fonction que cette primitive est une fonction que nous connaissons ou que nous puissions décrire !

L'un des exemples les plus célèbres est la fonction $f(x) = e^{-x^2}$. Qui est $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$?

3 Quelques propriétés de l'intégrale

Voici finalement venu le temps des démonstrations aisées grâce au Théorème fondamental.

Proposition 3.1. Linéarité de l'intégrale. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable et

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Démonstration. Une combinaison linéaire de fonctions continues est aussi continue, donc intégrable. Il reste donc à montrer le résultat de la linéarité de $\int_a^b$. Posons pour tout $a \leq x \leq b$

$$K(x) = \int_a^x (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt - \lambda \int_a^x f(t) dt - \mu \int_a^x g(t) dt.$$

La dérivée étant linéaire, on déduit par le Théorème fondamental du calcul intégral que

□

Proposition 3.2. Valeur absolue. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Démonstration. Nous décomposons la fonction f en partie positive $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ et partie négative $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Alors $\forall x, f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ et $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$. Ainsi, f et sa valeur absolue sont somme et différence de deux fonctions intégrables et positives. Par conséquent,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f^+(x) - f^-(x)) dx \right| = \left| \int_a^b f^+(x) dx - \int_a^b f^-(x) dx \right|,$$

par linéarité de l'intégrale. D'autre part,

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b (f^+(x) + f^-(x)) dx = \int_a^b f^+(x) dx + \int_a^b f^-(x) dx.$$

L'inégalité triangulaire $|u - v| \leq u + v$ pour deux nombres positifs permet de conclure.

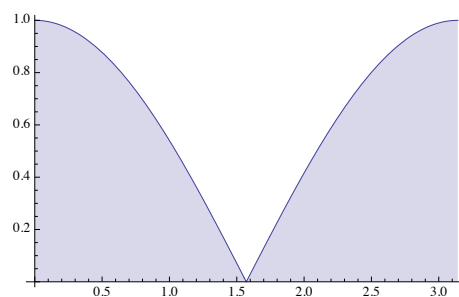
□

Exemple 3.3. Considérons la fonction cosinus définie sur $[0, \pi]$.

Puisque une primitive de $\cos$ est donnée par $\sin$, on calcule d'une part

$$\left| \int_0^\pi \cos x dx \right| =$$

D'autre part la fonction $|\cos| = \cos^+ + \cos^-$ est définie en "deux morceaux".

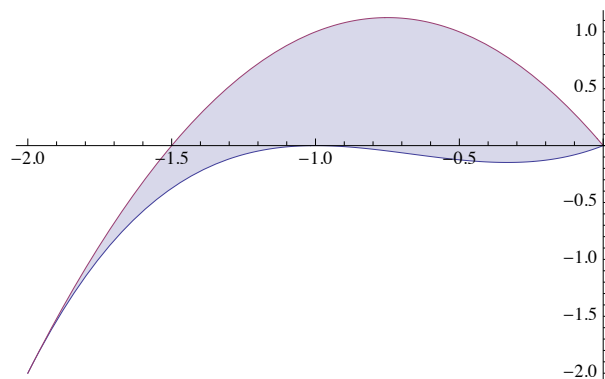


Elle vaut

Pour terminer, regardons comment le calcul intégral nous permet de calculer l'aire de certaines surfaces qui ne sont pas nécessairement déterminées par le graphe d'une seule fonction.

Exemple 3.4. Calculons l'aire de la surface comprise entre la cubique d'équation $y = x^3 + 2x^2 + x$ et la parabole d'axe vertical passant par les points $(0; 0)$, $(-1, 5; 0)$ et $(-2; -2)$.

Il faut d'abord déterminer l'équation de cette parabole.



III. Techniques d'intégration

Nous avons fait le lien entre l'intégrale définie à la Riemann et l'intégrale indéfinie, c'est-à-dire le calcul de primitives. La plupart du temps, le calcul d'une intégrale définie se fera donc via la recherche d'une primitive, mais il ne faudra pas oublier pour autant les sommes de Darboux puisque nous reprendrons épisodiquement cette technique pour appliquer le calcul intégral à la recherche de longueurs de courbe, de volume de tonneaux, etc.

Aujourd'hui, nous allons reprendre les grands résultats de la dérivation et en tirer des théorèmes d'intégration : intégration par changement de variables, intégration par parties.

1 L'intégrale en fonction de ses bornes

Nous avons fait le lien entre les primitives d'une fonction intégrable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et l'intégrale définie en nous rendant compte que la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f . Une propriété importante de l'intégrale vient de la possibilité de définir d'autres fonctions en changeant les bornes d'intégration.

Proposition 1.1. *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continue. Soient encore I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $g, h : I \rightarrow [a, b]$ des fonctions réelles dérivables sur I . Alors la fonction*

$$K(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$$

est dérivable et, pour tout $x \in I$, on a

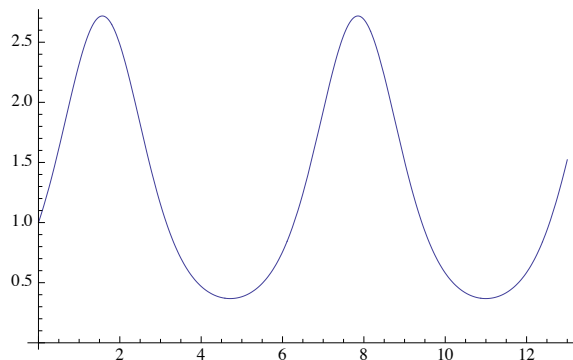
$$K'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x).$$

Démonstration. On pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors

□

Exemple 1.2. Montrons que le minimum global de la fonction $f(x) = \int_0^{x^2} e^{\sin t} dt$ est .

Voici le graphe de la fonction périodique $g(x) = e^{\sin x}$ pour $0 \leq x \leq 13$:



La fonction f étudiée est une fonction paire qui donne l'aire de la surface comprise entre le graphe de g , l'axe Ox et les abscisses 0 et x^2 . Cette fonction est donc strictement croissante pour $x > 0$.

2 Le changement de variables

La formule que nous venons de voir est basée sur la règle de "dérivation en chaîne" (dérivation d'une composition de fonctions). Elle est à la base de l'une des méthodes d'intégration les plus importantes et des plus utilisées. La démonstration n'est pas très compliquée, mais dans la pratique le défi consiste à trouver le "bon" changement de variables qui rendra possible le calcul de l'intégrale...

Théorème 2.1. Intégration par changement de variables. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, I un intervalle ouvert contenant deux nombres $\alpha < \beta$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ une fonction dérivable dont la dérivée φ' est continue. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Démonstration. Posons $g(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$, ce qui définit une fonction continue, donc intégrable et introduisons la fonction

$$G(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt.$$

Par la proposition 1.1, $G'(x) =$

Et par le théorème fondamental du calcul intégral,

□

Lorsqu'on veut calculer l'intégrale d'une fonction de la forme $f(ax + b)$ il vaut parfois la peine d'effectuer le changement de variables $t = ax + b$, ou encore $x = \varphi(t) = \frac{t - b}{a}$.

Exemple 2.2. Calculons $\int_1^2 e^{5x-4} dx$.

On aurait aussi pu deviner qu'une primitive de la fonction e^{5x-4} ressemble à e^{5x-4} , mais qu'il faut corriger par la dérivée interne si bien qu'une primitive est $\frac{e^{5x-4}}{5}$.

Un autre changement de variables courant consiste à poser $x = \varphi(t) = \tan(t)$, de sorte que $\varphi'(t) = 1 + \tan^2(t) = 1 + x^2$, ce qui permet de simplifier parfois des expressions difficilement intégrables directement.

Exemple 2.3. Calculons $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$.

On pose donc $\varphi(t) = \tan(t)$ si bien que $\varphi'(t) = 1 + \tan^2(t)$. Ainsi, lorsque $x \in [0, 1]$, on a

La formule du changement de variables permet donc d'écrire :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx =$$

Calculons l'expression sous la racine :

3 Intégration par parties

La méthode de l'intégration par changement de variables a été déduite de la formule de dérivation d'une composition de fonctions. La méthode que nous allons voir maintenant vient de la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions : $(f(x) \cdot g(x))' =$

Théorème 3.1. Intégration par parties. *Soit I un intervalle ouvert contenant a et b . On considère deux fonctions dérivables $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dont les dérivées sont continues. Alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Démonstration.

La formule de la dérivation du produit fg que nous venons de rappeler permet d'écrire

Il s'agit bien de

□

Les cas typiques où la méthode d'intégration par parties s'impose est celle où l'on voit un produit de deux fonctions dont l'une admet une primitive simple et l'autre une dérivée plus simple encore. C'est le cas par exemple d'un produit de fonctions trigonométriques ou exponentielles avec des fonctions polynômiales.

Exemple 3.2. On veut calculer $\int_0^1 x^2 \cos(x) dx$.

Voici maintenant un exemple où nous utiliserons successivement les deux méthodes que nous avons apprises aujourd'hui.

Exemple 3.3. On veut calculer $\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}} dx$.

Pour faire disparaître la racine, nous posons $t = \sqrt{x+1}$, c'est-à-dire $x = \varphi(t) =$

Exemple 3.4. On veut calculer $I_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt$.

Lorsque $n = 1$, nous connaissons une primitive de la fonction $\frac{1}{t^2 + 1}$, il s'agit de $\arctan t$, si bien que $I_1(x) = \arctan(x) - \arctan(0) = \arctan(x)$. Nous effectuons maintenant un raisonnement par induction et supposons que les fonctions $I_m(x)$ sont connues pour $m \leq n$.

Posons $f(t) = \frac{1}{(t^2 + 1)^n}$ et $g'(t) = 1$.

Alors $f'(t) =$

Cette formule de récurrence permet de calculer $I_n(x)$ pour tout $n \geq 1$. Par exemple

$$I_2(x) = \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \arctan(x)$$

4 Intégration d'expressions trigonométriques

Pour terminer ce cours consacré aux techniques d'intégration, nous parlerons des intégrales de fonctions trigonométriques. Lorsque les primitives ne sont pas immédiatement reconnaissables, il est souvent judicieux d'effectuer une transformation basée sur une formule trigonométrique.

Exemple 4.1. Calculons les primitives de la fonction $f(x) = \cos^2(x)$.

En se souvenant que $2 \cos^2(x) = \cos(2x) + 1$, les primitives de $\cos^2(x)$ sont celles de

On peut également procéder par parties :

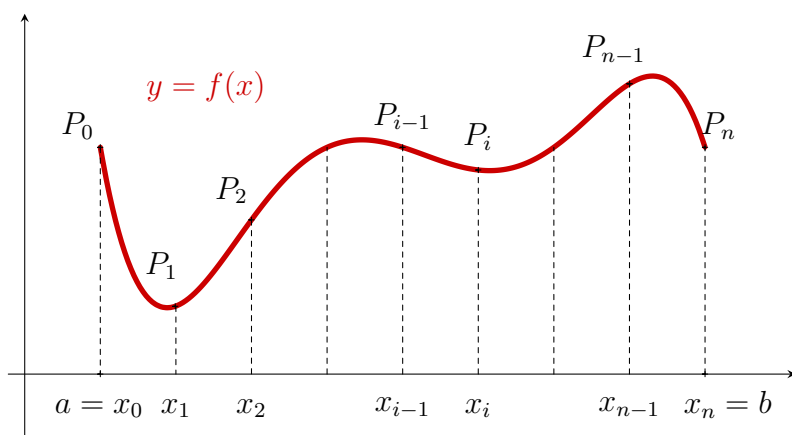
Exemple 4.2. Calculons l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \sin^5(x) dx$.

IV. Longueur d'une courbe et fractions rationnelles

Notre but aujourd'hui est de découvrir comment le calcul intégral, que nous avons développé pour calculer l'aire d'une surface, permet en fait aussi de calculer la longueur d'une courbe ainsi que le volume de certains solides comme nous le verrons la semaine prochaine. Nous aborderons ensuite la question de l'intégration des fractions rationnelles. Les fonctions polynomiales admettent des primitives simples et nous verrons qu'il est possible de donner un algorithme, mais pas une formule générale, pour intégrer toute fonction rationnelle.

1 La longueur d'une courbe

Considérons une fonction réelle continûment dérivable au voisinage de $[a, b]$ (pour que nous soyons sûrs que la dérivée aux bornes a et b existe bien). Nous aimerions mesurer la longueur du graphe de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. L'idée n'est plus originale : on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n "petits" morceaux $[x_{i-1}, x_i]$ (nous utilisons la subdivision régulière d'ordre n de sorte que la longueur de chacun de ces petits intervalles vaut $(b - a)/n$) et on approxime la longueur de chaque portion du graphe comprise entre les points d'abscisse x_{i-1} et x_i par la longueur d'un segment :



La longueur du segment d'extrémités

La fonction f est continue, dérivable, et sa dérivée est continue par hypothèse. Par conséquent la fonction f' , puis aussi $(f')^2$ et $\sqrt{1 + (f')^2}$ est continue, donc intégrable. Ceci signifie que l'intégrale définie

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

existe et peut être calculée comme limite des sommes de Darboux supérieures ou limite des sommes de Darboux inférieures. Or,

Théorème 1.1. *La longueur de l'arc de courbe défini par la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est égal à*

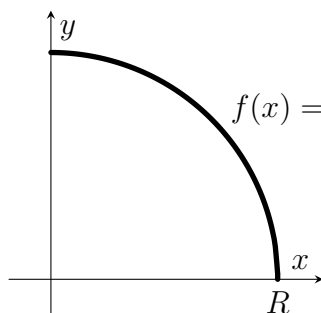
$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Démonstration. Pour terminer le raisonnement commencé ci-dessus, remarquons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\sigma_n}(\sqrt{1 + (f')^2}) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{\sigma_n}(\sqrt{1 + (f')^2}),$$

car la fonction est intégrable, ce qui signifie par définition que les sommes de Darboux supérieures et inférieures convergent vers la même limite (appelée intégrale définie). $\square$

Exemple 1.2. Calculons le périmètre du cercle. Pour cela, nous décidons de calculer la longueur d'un quart de cercle, la partie comprise dans le premier quadrant.



Nous considérons donc la fonction

2 Intégration de fonctions rationnelles "simples"

Rappelons qu'une primitive de la fonction $f(x) = x^n$ est $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ si $n \geq 0$. Par linéarité, nous savons donc intégrer toutes les fonctions polynomiales.

Proposition 2.1. *Soit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ une fonction polynomiale avec $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$. Alors toutes les primitives de $f(x)$ sont de la forme*

Nous savons aussi intégrer les fractions rationnelles de la forme $1/x^n = x^{-n}$ par le même procédé (avec le cas particulier $n = 1$ à tenir en compte) :

Proposition 2.2. *Les primitives de $\frac{1}{x}$ sont de la forme*

les primitives de $\frac{1}{x^n}$, pour $n \geq 2$, sont de la forme

De fait, nous savons aussi dériver les fonctions puissances $f(x) = x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, mais nous ne nous intéresserons pas à ces fonctions dans toute leur généralité aujourd'hui.

Exemple 2.3. Calculons $\int_3^4 \frac{x+1}{(x-2)^2} dx$.

Pour découvrir les primitives des fonctions rationnelles, nous continuerons avec celles dont le dénominateur est de degré 2. Etudions un exemple.

Rappelons au préalable que $\arctan x$ est une primitive de $\frac{1}{x^2+1}$.

Exemple 2.4. Calculons les primitives de la fonction $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-6x+13}$.

L'idée consiste à compléter le dénominateur de sorte à faire apparaître un carré parfait $(x-3)^2$, puis de poser $u = x - 3$. Ainsi,

La généralisation de cette méthode donne la formule générale de l'intégration des "éléments simples du second degré".

Théorème 2.5. Eléments simples du second degré. Soit r et s deux réels tels que $r^2 - s < 0$. Alors les primitives de la fonction $\frac{bx+c}{x^2+2rx+s}$ sont

$$\frac{b}{2} \ln(x^2 + 2rx + s) + \frac{c - rb}{\sqrt{s - r^2}} \arctan\left(\frac{x + r}{\sqrt{s - r^2}}\right) + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. La dérivée de $\frac{b}{2} \ln(x^2 + 2rx + s)$ vaut

□

Pour terminer cette section, voyons ce que nous pouvons faire lorsque le degré du numérateur est plus grand ou égal à celui du dénominateur. Dans ce cas nous effectuons d'abord la division euclidienne pour nous ramener à la situation précédente.

Exemple 2.6. On cherche à intégrer la fonction $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

3 Décomposition en éléments simples

Pour intégrer des fonctions rationnelles dont le dénominateur est de degré supérieur à 2, nous utiliserons la méthode de *décomposition en éléments simples*. Le but est d'écrire une fonction de la forme

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions polynomiales réelles, comme somme de fonctions "simples"

$$\frac{a}{x+r}, \frac{bx+c}{x^2+2rx+s}, \dots, \frac{a_k}{(x+r)^k}, \frac{b_kx+c_k}{(x^2+2rx+s)^k}$$

que nous savons intégrer. Pour cela la méthode est de décomposer d'abord le dénominateur en un produit de polynômes irréductibles (de degré 1 ou 2), puis d'appliquer l'identité de Bézout pour factoriser le numérateur. Voyons un exemple.

Exemple 3.1. Nous cherchons les primitives de la fonction $\frac{12}{x^3 - 8}$.

Le degré du numérateur étant plus petit que celui du dénominateur, nous n'avons pas besoin d'effectuer de division euclidienne. Il faut donc décomposer $x^3 - 8$.

On écrit alors

$$\frac{12}{x^3 - 8} =$$

Il suffit maintenant d'intégrer ces deux fractions rationnelles simples que nous venons d'étudier auparavant ! Ainsi les primitives de la fonction ci-dessus sont toutes de la forme :

En général, on peut toujours décomposer une fraction rationnelle en éléments simples. Nous ne verrons pas la théorie dans toute sa généralité (l'année prochaine en algèbre !), mais énonçons simplement le résultat que nous avons appliqué ci-dessus.

Proposition 3.2. *Soient $q(x)$ et $\bar{q}(x)$ deux polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ premiers entre eux et $Q(x) = q(x)\bar{q}(x)$. Alors la fraction rationnelle $P(x)/Q(x)$ se décompose comme*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{p(x)}{q(x)} + \frac{\bar{p}(x)}{\bar{q}(x)},$$

où $R(x)$ est un polynôme, $p(x)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à a , celui de $q(x)$, et $\bar{p}(x)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à b , celui de $\bar{q}(x)$.

Démonstration. L'identité de Bézout permet d'écrire $q(x)c(x) + \bar{q}(x)\bar{c}(x) = 1$. On remplace dans la fraction rationnelle et on simplifie

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) \cdot 1}{Q(x)} = \frac{P(x) \cdot (q(x)c(x) + \bar{q}(x)\bar{c}(x))}{q(x)\bar{q}(x)} = \frac{P(x)c(x)}{\bar{q}(x)} + \frac{P(x)\bar{c}(x)}{q(x)}.$$

On effectue ensuite les deux divisions euclidiennes et on appelle $R(x)$ la somme des deux quotients. Il reste alors une expression de la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{p(x)}{q(x)} + \frac{\bar{p}(x)}{\bar{q}(x)}.$$

□

Exemple 3.3. Calculons l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^4}{x^3 + 1} dx$.

V. Intégrales généralisées

Nous avons jusqu'ici calculé des intégrales de fonctions définies sur un intervalle fermé $[a, b]$. Parfois, il est possible d'étendre ces méthodes au cas de fonctions définies sur un intervalle "semi-ouvert" $[a, b[$ ou $]a, b]$ ou même ouvert $]a, b[$. D'autres fois encore, on peut calculer une intégrale définie sur un intervalle non-borné de la forme $[a, \infty[$ ou $] - \infty, b]$. Nous aimerions obtenir des critères qui nous permettent de savoir quelles fonctions on peut intégrer sur de tels intervalles. La quasi totalité de ce chapitre est tirée du chapitre 8 de l'ouvrage de J. Douchet et B. Zwahlen.

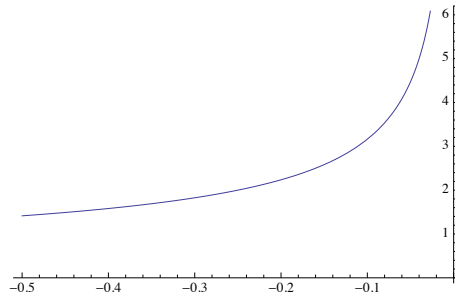
1 Le cas d'un intervalle borné

Nous étudions dans cette section l'intégrabilité de fonctions réelles définies sur un intervalle de la forme $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$. Nous traiterons en détail le premier cas, les autres ne présentent pas de surprises particulières. L'expression

$$\int_a^b f(x)dx$$

n'a pas de sens lorsque f n'est pas définie en b (on ne peut calculer ni la somme de Darboux inférieure, ni la somme de Darboux supérieure, à cause du dernier morceau de la subdivision).

Voici par exemple le graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$:



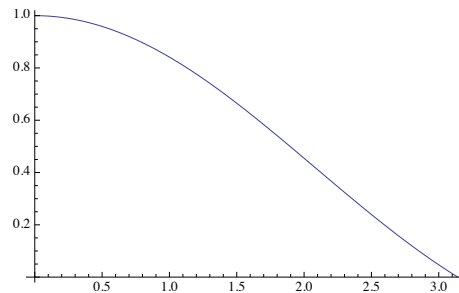
Néanmoins, peut-être que l'aire de la surface située entre l'axe Ox et le graphe est malgré tout finie ? On pose donc

Néanmoins, peut-être que l'aire de la surface située entre l'axe Ox et le graphe est malgré tout finie ? On pose donc

et on cherche à calculer la limite $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$.

Définition 1.1. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{b^-} f(t)dt$ existe ou converge si la limite $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ existe. Sinon, on dit que l'intégrale généralisée n'existe pas ou qu'elle diverge.

Exemple 1.2. Lorsque la fonction $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ peut être prolongée par continuité en b en une fonction $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée $\int_a^{b^-} f(t)dt$ converge et coïncide avec $\int_a^b \tilde{f}(t)dt$.



Cela ne veut pas dire pour autant que cette intégrale est facile à calculer. En fait, dans ce cas précis, on obtient le *sinus intégral* de π . Allez donc voir sur internet (chez Wolfram, par exemple, il y a une illustration du graphe de cette fonction $Si(x)$).

Notre principal critère de convergence des intégrales généralisées sera basé sur l'étude des fonctions $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

Théorème 1.3. Soit α un nombre réel. L'intégrale généralisée $\int_{0^+}^b \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge lorsque $\alpha < 1$ et diverge lorsque $\alpha \geq 1$.

Démonstration.

□

Nous pouvons encore calculer la valeur de l'intégrale généralisée lorsque $\alpha < 1$:

$$\int_{0^+}^b \frac{1}{t^\alpha} dt = \left. \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_0^b = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Exemple 1.4. Dans le cas de la fonction $1/\sqrt{|x|}$ que nous avons admirée tout à l'heure, on trouve en particulier que

Pour terminer, nous citons sans explications (ce seraient les mêmes que pour les fonctions intégrables que nous avons étudiées jusqu'ici) que l'intégrale généralisée est linéaire et qu'elle préserve la relation d'ordre $\leq$.

2 Critères de convergence

Nous établissons ici plusieurs critères de convergence. Commençons avec des fonctions positives.

Proposition 2.1. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue réelle positive ou nulle. Alors $\int_a^{b^-} f(t) dt$ existe si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que $\int_a^x f(t) dt \leq M$ pour tout $a \leq x < b$.

Démonstration. Comme f est positive, la fonction

□

Corollaire 2.2. Critère de comparaison. *Supposons que $g(x) \geq f(x) \geq 0$ au voisinage de b . Alors l'intégrale généralisée de f existe si celle de g existe et celle de g diverge si celle de f diverge.*

Voici enfin notre critère de convergence. Il utilise le critère de comparaison et notre connaissance des fonctions $1/x^\alpha$.

Théorème 2.3. Critère de convergence. *Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la limite $l = \lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^\alpha f(x)$ est non nulle. Alors l'intégrale généralisée*

$\int_a^{b^-} f(x)dx$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.

Démonstration. Supposons que la limite l est strictement positive (quitte à remplacer f par $-f$). Il existe donc un nombre $c < b$ tel que pour tout $c < x < b$,

□

Exemple 2.4. L'intégrale généralisée $\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} dx$

Une notion très utile pour déterminer si une intégrale généralisée existe est la suivante :

Définition 2.5. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{b^-} f(x)dx$ est *absolument convergente* si l'intégrale généralisée $\int_a^{b^-} |f(x)|dx$ est convergente.

Nous allons voir que cette notion de convergence absolue est plus forte que celle de convergence.

Proposition 2.6. *La convergence absolue entraîne la convergence.*

Démonstration. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que l'intégrale généralisée $\int_a^{b^-} |f(x)|dx$ est convergente. On remarque que les fonctions f^+ et f^- admettent aussi une intégrale généralisée sur $[a, b[$ puisqu'il s'agit de fonctions positives, inférieures ou égales à $|f|$.

Puisque $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, l'intégrale généralisée $\int_a^{b^-} f(x)dx$ converge par linéarité. $\square$

Une conséquence forte de cette proposition généralise le résultat vu ci-dessus pour les fonctions que l'on peut prolonger par continuité.

Théorème 2.7. Convergence pour les fonctions bornées. *Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^{b^-} f(x)dx$ est convergente.*

Démonstration. Soit M une borne supérieure de la fonction $|f(x)|$.

$\square$

Exemple 2.8. Etudions l'intégrale généralisée $\int_0^{1^-} \frac{1}{1-x} \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) dx$.

Tout d'abord, remarquons que la fonction à intégrer ne se prolonge pas par continuité en 1, puisqu'elle oscille de plus en plus rapidement au voisinage de 1. On intègre par parties, en posant

$$f'(x) = -\sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad g(x) = x - 1.$$

Alors

3 Le cas d'un intervalle non borné

Considérons une fonction réelle et continue $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Nous copions mot pour mot ce que nous avons fait auparavant en remplaçant chaque symbole " $\lim_{x \rightarrow b^-}$ " par " $\lim_{x \rightarrow \infty}$ ". Ainsi, par exemple, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^\infty f(t)dt$ existe ou converge si la limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t)dt$ existe.

Nous passons à nouveau sur la linéarité et la préservation de la relation d'ordre $\leq$.

Exemple 3.1. Etudions la convergence de l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$. Nous avons vu que l'intégrale généralisée de la fonction $1/x$ diverge sur $]0, 1]$, aurons-nous plus de chance vers l'infini ?

Plus généralement, l'étude des fonctions de la forme $1/t^\beta$ est riche en conséquences.

Proposition 3.2. L'intégrale généralisée $\int_a^\infty \frac{1}{x^\beta} dx$ converge pour $\beta > 1$ et diverge pour $\beta \leq 1$.

Démonstration. Lorsque $\beta < 1$,

□

Les fonctions $\frac{1}{x^\beta}$ ont la propriété de tendre vers zéro lorsque x tend vers l'infini. Elles avaient donc toutes, a priori, une chance de faire converger leur intégrale généralisée. En effet, si tel n'était pas le cas, la convergence est exclue.

Proposition 3.3. Soit $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue pour laquelle l'intégrale généralisée $\int_a^\infty f(x)dx$ converge. Alors, si la limite $l = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existe, elle doit être nulle : $l = 0$.

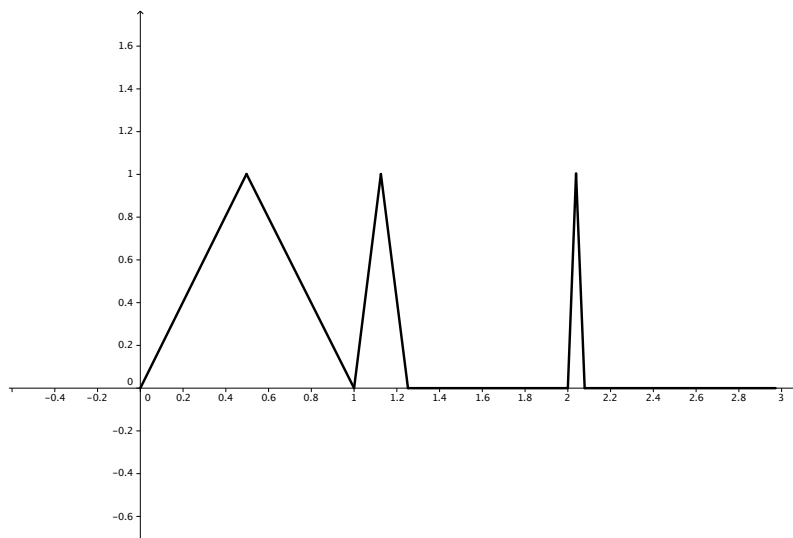
Démonstration.

Supposons par l'absurde que $l > 0$, quitte à remplacer f par $-f$ et conclure par linéarité.

Il existe alors $c > a$ tel que

□

Remarque 3.4. Il existe des fonctions qui n'admettent pas de limite à l'infini et qui pourtant sont intégrables sur $[a, \infty[$. On peut construire de telles fonctions de la manière suivante. On décide que $f(x) = 0$ pour $x - [x] \geq 1/([x] + 1)^2$. Ainsi la fonction est nulle sur une partie de plus en plus grande de chaque intervalle $[n, n + 1]$. Sur le début de chacun de ces intervalles, on définit f de sorte à ce que son graphe forme un triangle isocèle de hauteur 1, comme ceci :



L'aire de chacun de ces triangles vaut $1/2 \cdot 1/n^2 \cdot 1$. La somme de ces aires converge (vers $\pi^2/12$), si bien que l'intégrale généralisée de cette fonction existe sans pour autant que f ait de limite.

Terminons avec un exemple d'une fonction définie sur un intervalle fermé et où un changement de variables nous permet de calculer l'intégrale généralisée en passant par $\mathbb{R}$ tout entier !

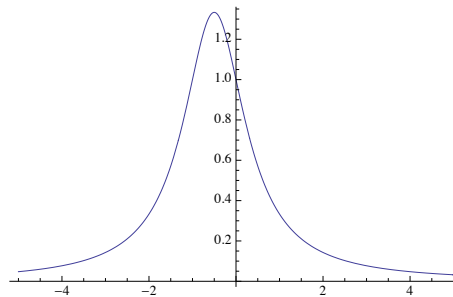
Exemple 3.5. On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{2 + \sin(x)}$ et on cherche à calculer $I = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$, une intégrale qui existe puisque f est continue et définie sur $[-\pi, \pi]$.

Effectuons le changement de variables $x = \varphi(t) = 2 \arctan(t)$ d'où $\varphi'(t) = \frac{2}{1 + t^2}$.

Calculons d'abord $\sin(2 \arctan(t)) =$

Par conséquent, on obtient

Voici le graphe de cette fraction rationnelle. Heureusement, les limites vers $\pm\infty$ sont nulles.



On continue avec la formule d'intégration d'éléments simples ou, ici, en complétant le carré :