EPFL - Printemps 2025	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 2	

Exercice 1.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier la réponse par un raisonnement ou un contre-exemple.

1. L'image d'un idéal bilatère par un homomorphisme d'anneaux est encore un idéal bilatère.
2. La préimage d'un idéal bilatère par un homomorphisme d'anneaux est encore un idéal bilatère.

Exercice 2.
Considérons l'homomorphisme

$$\xi_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[t] & \to & \mathbb{F}_p[t] \\ \sum_{i=0}^n a_i t^i & \mapsto & \sum_{i=0}^n [a_i] t^i \end{array}$$

qui envoie un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ au polynôme obtenu par réduction des coefficients mod p. Soit $f(t)$ un polynôme dans $\mathbb{F}_p[t]$ et $g(t)$ une pré-image par ξ_p. Montrez que la pré-image de l'idéal $(f(t))$ est $(p, g(t))$.

Exercice 3.
Prouvez les affirmations suivantes.

1. Un anneau intègre avec un nombre fini d'éléments est un corps.
2. Soit K un corps et A un anneau commutatif.
   (a) Soit $K \to A$ un morphisme d'anneau. Montrez que multiplier par l'image des éléments de K fait de A un K-espace vectoriel avec son addition qui vient de la structure d'anneau de A.
   (b) Si maintenant A est intègre et de dimension finie en tant qu'espace vectoriel avec la structure ci-dessus, montrez que A est un corps.

Exercice 4.
Soit $f\colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux.

1. Montrer que $\mathrm{car}(B)$ divise $\mathrm{car}(A)$, mais qu'en général $\mathrm{car}(B) \neq \mathrm{car}(A)$.
2. Montrer que si f est injectif alors $\mathrm{car}(B) = \mathrm{car}(A)$.
3. Montrer que si A est commutatif et $\mathrm{car}(A) = p$, un nombre premier, alors l'application $F\colon A \to A$ définie par $F(a) = a^p$ est un homomorphisme d'anneaux.
4. Calculer la caractéristique de l'anneau $\mathbb{Z}[i]/(i-2)$.

Exercice 5.
Soit $A = \mathbb{Z}/250\mathbb{Z}$.

1. Trouver tous les diviseurs de zéro et tous les éléments inversibles de A.

2. Trouver tous les idéaux de A qui contiennent l'élément $[50]_{250}$. (Ce qu'on veut dire par cette notation c'est l'image de 50 dans $\mathbb{Z}/250\mathbb{Z}$.)

Exercice 6.
Soit A le sous-anneau de $M_2(\mathbb{Z})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Montrez que le sous-ensemble K des matrices pour lesquelles $5 \mid a$ et $11 \mid b$ est un idéal bilatère et construire un isomorphisme (en deux temps) $A/K \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

Exercice 7.
Soit R un anneau commutatif.

1. Montrer que $R[x, y]/(x) \cong R[y]$ (donner la forme explicite d'un isomorphisme).
2. Construire un homomorphisme d'anneaux $R[x, y] \to R[x] \times R[y]$ dont le noyau est (xy).
3. Identifier l'image de cet homomorphisme et en conclure que $R[x, y]/(xy)$ est isomorphe au sous-anneau de $R[x] \times R[y]$ formé des couples de polynômes $(p(x), q(y))$ tels que $p(0) = q(0)$.