

Exercice 1.

Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'ensemble B est un sous-anneau, un idéal à gauche, un idéal à droite, un idéal bilatère de l'anneau A ou s'il ne possède aucune de ces propriétés:

- (a) $A = \mathbb{Z}$ et $B = 9\mathbb{Z}$; (e) $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$;
(b) $A = \mathbb{F}_{11}$ et $B = \{[0], [2], [4], [6], [8], [10]\}$; (f) $A = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ et $B = \{[0], [5], [10]\}$;
(c) $A = \mathbb{Z}[t]$ et $B = t^2 \cdot \mathbb{Z}[t^2]$;
(d) $A = \mathbb{F}_2[t]$ et $B = t^2 \cdot \mathbb{F}_2[t]$; (g) $A = M_n(\mathbb{R})$, $B = \{M \mid m_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}$;
(h) $A = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \text{ ne divise pas } b \right\}$ et $B = p^n \mathbb{Z}_{(p)}$, où p est un premier et $n \in \mathbb{N}$;
(i) $A = M_3(\mathbb{R})$ et $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & b & 0 \\ c & c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;
(j) $A = \mathbb{C}[S_3]$ et $B = \left\{ \sum_{g \in S_3} \lambda \cdot g \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}$;
(k) $A = \mathbb{C}[S_3]$ et $B = \{\lambda(123) + \lambda(132) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Exercice 2.

Soit K un corps et $M_n(K)$ l'anneau des matrices carrées de taille $n \times n$.

- (a) Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ fixés. Soit I un idéal à gauche de $M_n(K)$ contenant la matrice e_{ij} . Montrer que I contient aussi toutes les matrices "concentrées dans la j -ème colonne", i.e. (b_{rs}) avec $b_{rs} = 0$ si $s \neq j$.
(b) Montrer que le sous-ensemble des matrices concentrées dans la j -ème colonne forme un idéal à gauche de $M_n(K)$.
(c) Montrer que les seuls idéaux bilatères de $M_n(K)$ sont $\{0\}$ et $M_n(K)$.

Exercice 3.

Soit R un anneau commutatif.

- (a) Montrer que $R[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] \cong R[t]/(t^n - 1)$.
(b) Montrer que $R[\mathbb{Z}] \cong R[x, y]/(xy - 1)$.

Réfléchissez où doivent être envoyés les éléments des groupes/les variables.

Exercice 4.

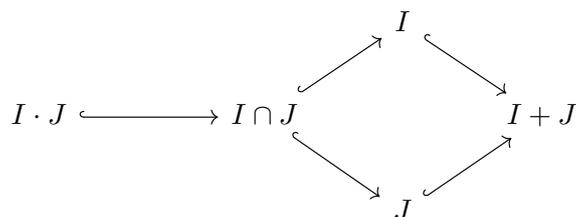
Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier la réponse par un raisonnement ou un contre-exemple.

- (a) Si A est un anneau intègre, et I et J sont deux idéaux non nuls de A , alors $I \cap J$ est aussi un idéal non nul de A .
(b) Si K est un corps, alors les deux seuls idéaux de K sont $\{0\}$ et K .

- (c) Si K est un anneau n'ayant que deux idéaux bilatères, alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.
- (d) Si K est un anneau commutatif n'ayant que deux idéaux, alors K est un corps.
- (e) Si K est un anneau tel que les seuls idéaux à gauche sont $\{0\}$ et K , alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.
- (f) Si K est un anneau tel que les seuls idéaux à droite sont $\{0\}$ et K , alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.

Exercice 5.

Considérons $\mathbb{Q}[x, y]$ et soient $I = (xy)$ et $J = (y^2)$. Montrer que chacune des inclusions dans le diagramme suivant sont strictes.



Exercice 6.

Soit A un anneau commutatif. Montrer les isomorphismes suivants:

- (a) $A[t]/(t - a) \cong A$ pour $a \in A$.
- (b) $M_n(A)/M_n(I) \cong M_n(A/I)$ si I est un idéal bilatère de A .
- (c) $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]/(5 + 2\sqrt{7}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (on pourra commencer par identifier le noyau de l'unique homomorphisme d'anneaux $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{7}]/(5 + 2\sqrt{7})$).

Exercice 7.

Soit $1 \neq \epsilon \in \mathbb{C}$ une racine cubique de l'unité.

- (a) Montrer que $\mathbb{Z}[\epsilon] \cong \mathbb{Z}[t]/(t^2 + t + 1)$.
- (b) Montrer que $\mathbb{Q}[\epsilon] = \text{Frac}(\mathbb{Z}[\epsilon])$.
- (c) Montrer que la dimension de $\mathbb{Q}[\epsilon]$ en tant que \mathbb{Q} -espace vectoriel est 2.