EPFL - Printemps 2025	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 1.2	

Exercice 1.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'ensemble B est un sous-anneau, un idéal à gauche, un idéal à droite, un idéal bilatère de l'anneau A ou s'il ne possède aucune de ces propriétés:

(a) $A = \mathbb{Z}$ et $B = 9\mathbb{Z}$;

(b) $A = \mathbb{F}_{11}$ et $B = \{[0], [2], [4], [6], [8], [10]\}$;

(c) $A = \mathbb{Z}[t]$ et $B = t^2 \cdot \mathbb{Z}[t^2]$;

(d) $A = \mathbb{F}_2[t]$ et $B = t^2 \cdot \mathbb{F}_2[t]$;

(e) $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$;

(f) $A = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ et $B = \{[0], [5], [10]\}$;

(g) $A = M_n(\mathbb{R})$, $B = \{M \mid m_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}$;

(h) $A = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \text{ ne divise pas } b \right\}$ et $B = p^n\mathbb{Z}_{(p)}$, où p est un premier et $n \in \mathbb{N}$;

(i) $A = M_3(\mathbb{R})$ et $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & b & 0 \\ c & c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;

(j) $A = \mathbb{C}[S_3]$ et $B = \left\{ \sum_{g \in S_3} \lambda \cdot g \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}$;

(k) $A = \mathbb{C}[S_3]$ et $B = \{\lambda(123) + \lambda(132) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Exercice 2.
Soit K un corps et $M_n(K)$ l'anneau des matrices carrées de taille $n \times n$.

(a) Soit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ fixés. Soit I un idéal à gauche de $M_n(K)$ contenant la matrice e_{ij}. Montrer que I contient aussi toutes les matrices "concentrées dans la j-ème colonne", i.e. (b_{rs}) avec $b_{rs} = 0$ si $s \neq j$.

(b) Montrer que le sous-ensemble des matrices concentrées dans la j-ème colonne forme un idéal à gauche de $M_n(K)$.

(c) Montrer que les seuls idéaux bilatères de $M_n(K)$ sont $\{0\}$ et $M_n(K)$.

Exercice 3.
Soit R un anneau commutatif.

(a) Montrer que $R[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] \cong R[t]/(t^n - 1)$.

(b) Montrer que $R[\mathbb{Z}] \cong R[x, y]/(xy - 1)$.

Réfléchissez où doivent être envoyés les éléments des groupes/les variables.

Exercice 4.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier la réponse par un raisonnement ou un contre-exemple.

(a) Si A est un anneau intègre, et I et J sont deux idéaux non nuls de A, alors $I \cap J$ est aussi un idéal non nul de A.

(b) Si K est un corps, alors les deux seuls idéaux de K sont $\{0\}$ et K.

(c) Si K est un anneau n'ayant que deux idéaux bilatères, alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.

(d) Si K est un anneau commutatif n'ayant que deux idéaux, alors K est un corps.

(e) Si K est un anneau tel que les seuls idéaux à gauche sont $\{0\}$ et K, alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.

(f) Si K est un anneau tel que les seuls idéaux à droite sont $\{0\}$ et K, alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.

Exercice 5.
Considérons $\mathbb{Q}[x, y]$ et soient $I = (xy)$ et $J = (y^2)$. Montrer que chacune des inclusions dans le diagramme suivant sont strictes.

$$\begin{tikzcd}
 & & I \arrow[dr, hook] & \\
I \cdot J \arrow[r, hook] & I \cap J \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & I + J \\
 & & J \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Exercice 6.
Soit A un anneau commutatif. Montrer les isomorphismes suivants:

(a) $A[t]/(t - a) \cong A$ pour $a \in A$.

(b) $M_n(A)/M_n(I) \cong M_n(A/I)$ si I est un idéal bilatère de A.

(c) $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]/(5 + 2\sqrt{7}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (on pourra commencer par identifier le noyau de l'unique homomorphisme d'anneaux $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[\sqrt{7}]/(5 + 2\sqrt{7})$).

Exercice 7.
Soit $1 \neq \epsilon \in \mathbb{C}$ une racine cubique de l'unité.

(a) Montrer que $\mathbb{Z}[\varepsilon] \cong \mathbb{Z}[t]/(t^2 + t + 1)$.

(b) Montrer que $\mathbb{Q}[\varepsilon] = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[\varepsilon])$.

(c) Montrer que la dimension de $\mathbb{Q}[\varepsilon]$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel est 2.