EPFL - Printemps 2025	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 1.1	

Les exercices indiqués par une étoile $\star$ sont optionnels.

Exercice 1.
Soit R un anneau. Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont-ils des sous-anneaux ?

1. $\{A \in M_n(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\} \subset M_n(R)$.
2. $\{A \in M_n(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i \leq j\} \subset M_n(R)$.
3. $\{A \in M_n(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\} \subset M_n(R)$.
4. $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.
5. $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$.
6. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subset M_2(\mathbb{Z})$.
7. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \right\} \subset M_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Exercice 2.
Dans chacun des cas suivants, déterminez l'ensemble des homomorphismes d'anneaux $A \to B$.

1. $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}$.
2. $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$.
3. $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$.
4. $A = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $m, n \in \mathbb{N}$.
5. $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R}$.
6. $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}$.
7. $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{Q}$.
8. $A = \mathbb{R}[t]$ et $B = \mathbb{R}$.
9. $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}[t]$.

Indication : Pour le point 6, montrez qu'un homomorphisme $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ envoie les réels positifs vers les réels positifs, et déduisez que f préserve l'ordre usuel sur les réels.

Exercice 3.
Soient A un anneau commutatif et $a \in A$. Montrer que l'application

$$f\colon A[t] \to A[t], \quad p(t) \mapsto p(t+a)$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Exercice 4.
Soit G un groupe fini non-trivial. Considérons l'anneau $\mathbb{Z}[G]$.

1. Supposons que $g \in G$ soit non-trivial et que $g^2 = e$. Montrez que $1 - g$ et $1 + g$ sont des diviseurs de zéro.
2. Plus généralement, montrez que si $g \in G$ est non-trivial, alors $1 - g$ est un diviseur de zéro.

Exercice 5.
Montrez qu'il existe au plus 4 homomorphismes d'anneaux $\mathbb{Z}[S_3] \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Indication : si $f\colon \mathbb{Z}[S_3] \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est un homomorphisme, étudiez les images possibles des éléments de S_3.
($\star$) Montrez qu'il existe exactement 4 morphismes $\mathbb{Z}[S_3] \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exercice 6.
Soit K un corps et $R \subset K$ un sous-anneau.

1. Montrer que R est intègre.

2. Montrer que si pour tout élément de $k \in K$ il existe $r \in R$ non-nul tel que $rk \in R$, alors l'application naturelle $\mathrm{Frac}(R) \to K$ est un isomorphisme.

3. Les inclusions suivantes sont-elles l'inclusion d'un anneau dans son corps des fractions ?

   (a) $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{Q}[i]$
   (b) $\mathbb{Z}[t] \subset \mathbb{Q}[t]$
   (c) $R[x, y] \subset K(x, y)$ si $K = \mathrm{Frac}(R)$.

Exercice 7 ($\star$).
Soit k un corps. Considérons l'anneau des séries formelles $k[[t]]$.

1. Montrez que $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ est un élément inversible de $k[[t]]$ si et seulement si $a_0 \neq 0$.
   Indication : Construisez les inverses algorithmiquement. Le cas de $f(t) = 1 - t$ est instructif pour comprendre la preuve générale.

2. Montrer que le corps des fractions de $k[[t]]$ est donné par les séries de Laurent

$$k((t)) := \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i \mid a_i \in k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$