EPFL — Cours Euler 12.02.2025
Deuxième année

Série 22

Exercice 1. Soit a un nombre réel. Étudie la convergence de la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de a. Pour te faire une idée, regarde au besoin les cas $a = 1/2$, $a = -1/2$, $a = 1$, $a = -1$, $a = 2$ et $a = -2$.

Exercice 2. Suites récurrentes monotones. Calcule les quatre premiers termes des suites suivantes. Étudie la convergence et trouve la limite lorsqu'elle existe.

a) $x_n = 2x_{n-1} + 1$ pour $n \geq 1$ et $x_0 = 0$.

b) $x_n = x_{n-1}^2 + 1$ pour $n \geq 1$ et $x_0 = 1/2$.

c) $x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}\right)$ pour $n \geq 2$ et $x_1 = 2$.

d) $x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}\right)$ pour $n \geq 2$ et $x_1 = 1$.

Exercice 3. Étudie la convergence des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général donné (en justifiant, bien sûr).

a) $x_n = \dfrac{2n+3}{n-1}$

b) $x_n = \dfrac{5-n^2}{10n+1}$

c) $x_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

d) $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

e) $x_n = \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

f) $x_n = \sqrt{n^2+6n} - n$

Exercice 4. On donne les premiers termes d'une suite :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\ ;\ \frac{2\sqrt{5}-1}{6}\ ;\ \frac{2\sqrt{10}-2}{9}\ ;\ \frac{2\sqrt{17}-3}{12}\ ;\ \frac{2\sqrt{26}-4}{15}\ ;\ \frac{2\sqrt{37}-5}{18}\ ;\ \ldots\right)$$

Propose une expression explicite du terme général, puis étudie la limite éventuelle de ta suite.

Exercice 5. Étudie la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général donné (en justifiant, bien sûr !).

a) $a_n = \dfrac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$ **b)** $b_n = \dfrac{1}{n-\sqrt{n}}$ **c)** $c_n = \dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}}$ **d)** $d_n = \dfrac{4^n}{n!}$

Exercice 6. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$a_0 = 0\ ,\quad a_{n+1} = \frac{3a_n+1}{4} \qquad \text{et} \qquad b_0 = 2\ ,\quad b_{n+1} = \frac{3b_n+1}{4}$$

a) Soit la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $c_n = a_n + b_n$. Calcule les quatre premiers termes de cette suite, et détermine la forme explicite de son terme général.

b) Soit la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = b_n - a_n$. Calcule les quatre premiers termes de cette suite, et détermine la forme explicite de son terme général.

c) Donne le terme général de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ainsi que le terme général de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Démontre que chacune des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donne leurs limites respectives.

Exercice 7. Soient les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$a_0 = 1\ , \quad a_{n+1} = \frac{5a_n}{3a_n - 4} \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{a_n - 3}{a_n}$$

a) Détermine r tel que $b_{n+1} = r \cdot b_n$.

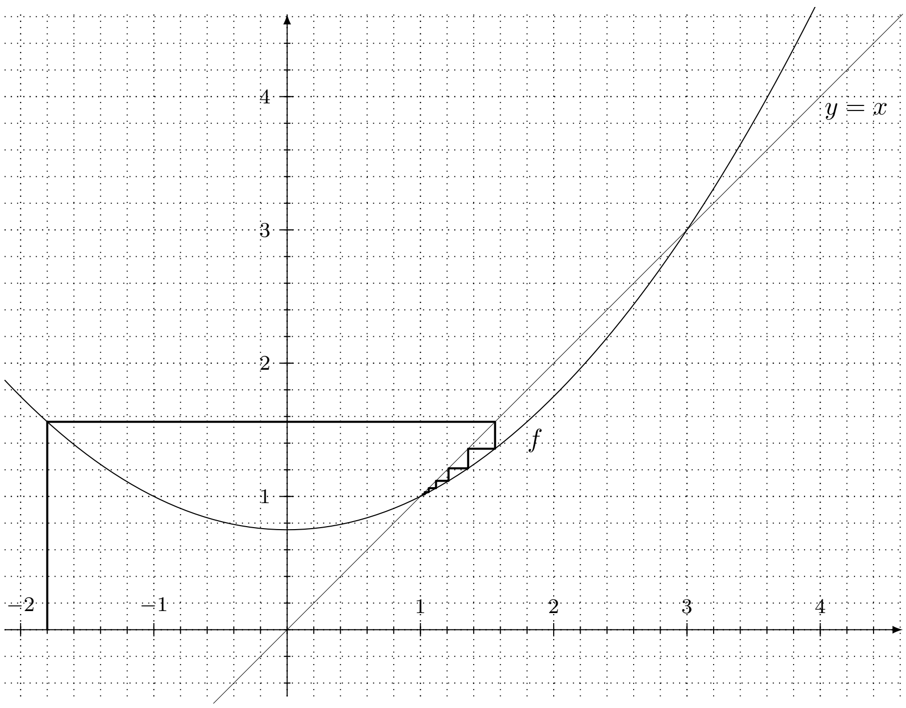
b) Donne les formes explicites de b_n et de a_n.

c) Étudie la convergence de ces deux suites.

Exercice 8. On considère ci-dessous le graphe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 3)$, ainsi que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$b_0 = -\frac{9}{5}\ , \quad b_{n+1} = f(b_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a) Calcule les 4 premiers termes de la suite avec une machine au besoin. Propose le candidat à la limite, puis explique pourquoi la ligne brisée en gras ci-dessous représente la convergence de la suite (b_n).



b) À l'Exercice 1 de la Série 21, tu as étudié la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$a_0 = \frac{6}{5}\ , \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 3\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Peux-tu déterminer graphiquement si cette suite est monotone, et quelle sera sa limite ?

c) Soit finalement une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui satisfait $c_{n+1} = f(c_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Détermine graphiquement toutes les valeurs de $c_0 \in \mathbb{R}$ telles que la suite (c_n) est croissante ou décroissante, et dans quels cas elle tend vers une limite ou pas (énumère tous les cas, bien sûr !).

Exercice 9. Autour du nombre d'Euler. Calcule les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2}$ **b)** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n}$ **c)** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n}$

Indication. Pour **b)**, pose $m = 2n$. Cette idée peut aussi servir pour la limite suivante.