VIII. Matrices diagonalisables

Pour terminer ce chapitre consacré aux bases de l'algèbre linéaire, nous étudierons aujourd'hui les matrices diagonalisables, qui sont les matrices semblables à une matrice diagonale. Cela nous permettra ensuite de décrire plus facilement des applications linéaires, en trouvant une base adaptée à l'interprétation géométrique.

1 Matrices diagonalisables

Pour construire la matrice d'une application linéaire $\alpha : V \to V$, nous avons vu qu'une base vaut parfois mieux qu'une autre car l'interprétation géométrique est plus immédiate. Notre but est de savoir s'il existe une base par rapport à laquelle la matrice de α est diagonale, et le cas échéant de trouver une telle base.

Définition 1.1. Une matrice $A \in M_n(K)$ est *diagonalisable* s'il existe une matrice inversible $S \in GL_n(K)$ telle que $SAS^{-1} = D$ est diagonale.
Une application linéaire $\alpha : V \to V$ est *diagonalisable* s'il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que $(\alpha)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = D$ est diagonale.

Remarque 1.2. Une matrice A est donc diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Proposition 1.3. *Une application linéaire $\alpha : V \to V$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base formée de vecteurs propres.*

Démonstration.

α diagonalisable $\iff$

$\exists$ une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de V telle que $(\alpha)_B^B = D = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$

On a alors $\alpha(e_i) = \lambda_i e_i$ pour $i = 1, \dots, n$ $\iff$

les e_i constituant B sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i. $\square$

Exemple 1.4. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Valeurs propres :

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ et $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2$

Seule valeur propre : $\lambda = 1$, solution de $(1-\lambda)^2 = 0$.

$E_1 = \mathrm{Ker}(A - 1 \cdot I)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \in K \end{cases}$

$\Rightarrow E_1 = \langle (1;0) \rangle$ et $\dim E_1 = 1 < \dim V = 2$

On n'a pas deux vecteurs propres linéairement indépendants pour former une base de V.

Donc A n'est pas diagonalisable.

Exemple 1.5. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Valeurs propres :

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$

Valeurs propres : $\lambda = 0$ et $\lambda = 2$.

$E_0 = \mathrm{Ker}(A)$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow E_0 = \langle (1;-1) \rangle$

$E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I)$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y \Rightarrow E_2 = \langle (1;1) \rangle$

A est diagonalisable avec $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$(\alpha)_{B^*}^{B^*}$

ou alors $\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\tilde{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$B^* = ((1;-1)(1;1))$

$\tilde{B} = ((1;1);(1;-1))$

Exemple 1.6. Considérons l'application linéaire $\alpha(x, y, z) = (3y - z; 2x - y + z; 2z)$. $V = \mathbb{R}^3$

Exprimé dans la base canonique la matrice de α est $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminons les valeurs propres :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} -\lambda & 3 \\ 2 & -1-\lambda \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$$= -\lambda(-1-\lambda)(2-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 - 6(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\left[\lambda(1+\lambda) - 6\right] = (2-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 6)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda+3)(\lambda-2) = -(\lambda-2)^2(\lambda+3)$$

Valeurs propres : $\lambda = 2$ (double) et $\lambda = -3$ (simple)

Déterminons ensuite les espaces propres associés à chaque valeur propre :

$$E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I) : \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x - 3y + z = 0$$

$$\iff z = 3y - 2x \quad \text{d'où} \quad E_2 = \langle (1;0;-2);(0;1;3) \rangle$$

$$E_{-3} = \mathrm{Ker}(A + 3I) : \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

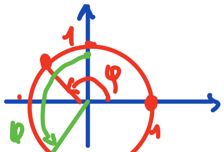
$$E_{-3} = \langle (1;-1;0) \rangle$$

On pose $f_1 = (1;0;-2)$, $f_2 = (0;1;3)$, $f_3 = (1;-1;0)$

La base (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres.
Dans cette base, la matrice de α a la forme

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.7. Les rotations du plan. Soit $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle φ, un angle exprimé en radian, et R_φ la matrice de rotation correspondante, exprimée dans la base canonique. Alors



$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Remarquons d'abord que si $\sin\varphi = 0$, alors $\cos\varphi = \pm 1$ o $\varphi = 0 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, $\varphi = \pi + k\cdot 2\pi$

$$\Rightarrow R_0 = I \quad \text{et} \quad E_1 = \mathbb{R}^2$$

$$R_\pi = -I \quad \text{et} \quad E_{-1} = \mathbb{R}^2$$

Cherchons les valeurs propres lorsque $\sin\varphi \neq 0$:

$$R_\varphi - \lambda I = \begin{pmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(R_\varphi - \lambda I) &= (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi \\ &= \cos^2\varphi - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2 + \sin^2\varphi \\ &= \lambda^2 - 2\cos\varphi\,\lambda + 1 \end{aligned}$$

$$\Delta = 4\cos^2\varphi - 4 = 4(\underbrace{\cos^2\varphi - 1}_{\leq 0}) < 0 \quad \text{car} \quad \cos\varphi \neq \pm 1$$

$\Rightarrow$ pas de valeurs propres réelles

$\Rightarrow$ pas de vecteurs propres

$\Rightarrow$ R_φ pas diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$

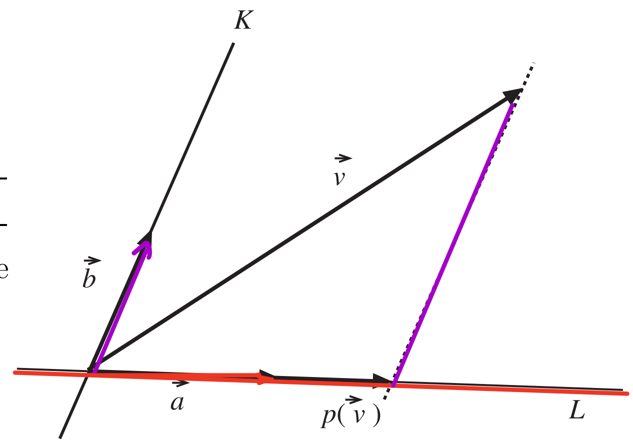
Exemple 1.8. Reprenons le même exemple, mais en considérant cette matrice dans $M_2(\mathbb{C})$.
Alors le polynôme $\lambda^2 - 2\cos(\varphi)\lambda + 1$ admet deux racines complexes distinctes.
En faisant les calculs, nous obtenons deux espaces propres de dimension 1.
On peut donc choisir une base de vecteurs propres afin de diagonaliser cette matrice !

Pour les sections suivantes, on fait la correspondance suivante entre points et vecteurs du plan ou de l'espace :

$$M(x;y) \iff \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{OM} \quad \text{et} \quad M(x;y;z) \iff \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{OM}$$

2 Projections vectorielles du plan V_2

Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non colinéaires de V_2. L'application p qui associe à tout vecteur $\vec{v}$ sa projection $p(\vec{v})$ sur la droite vectorielle $L = \langle\vec{a}\rangle$ parallèlement à la droite vectorielle $K = \langle\vec{b}\rangle$ est une application linéaire.



Proposition 2.1. *Une application linéaire $\alpha : V_2 \to V_2$ est une projection si et seulement si elle possède les valeurs propres 0 et 1.*
Dans ce cas, α est une projection sur E_1 parallèlement à E_0.

Démonstration.
Dans la base $B = (\vec{a}\,;\vec{b})$, on $\alpha(\vec{a}) = \vec{a}$ et $\alpha(\vec{b}) = \vec{0}$

Relativement à B, $(\alpha)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

□

Exemple 2.2. Prouver que l'application linéaire $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique est une projection.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-2\lambda & 1 \\ 1 & 1-2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1)$$

Les valeurs propres sont 0 et 1 donc α est une projection.

3 Projections vectorielles de l'espace V_3

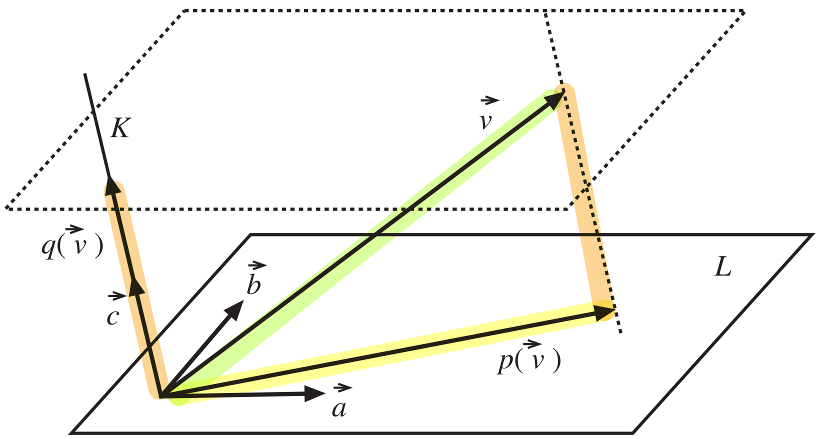
Soit $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

1.
- L'application p qui associe à tout vecteur $\vec{v}$ sa projection $p(\vec{v})$ sur le plan vectoriel $L = \langle \vec{a}; \vec{b} \rangle$ parallèlement à la droite vectorielle $K = \langle \vec{c} \rangle$ est une application linéaire.

2.
- L'application q qui associe à tout vecteur $\vec{v}$ sa projection $q(\vec{v})$ sur la droite vectorielle $K = \langle \vec{c} \rangle$ parallèlement au plan vectoriel $L = \langle \vec{a}; \vec{b} \rangle$ est une application linéaire.
- Les projections p et q sont liées par la relation

$$q(\vec{v}) = \vec{v} - p(\vec{v}) = (\mathrm{id}_{V_3} - p)(\vec{v})$$

car $\vec{v} = p(\vec{v}) + q(\vec{v})$



Proposition 3.1. *Une application linéaire $\alpha : V_3 \to V_3$ est une projection si et seulement si elle possède les valeurs propres 0 et 1 et si l'un des espaces propres est de dimension 2.*
Dans ce cas, α est une projection sur E_1 parallèlement à E_0.

Démonstration. On travaille dans la base $B = (\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$

1. $p(\vec{a}) = \vec{a}$; $p(\vec{b}) = \vec{b}$ et $p(\vec{c}) = \vec{0}$ et $(P)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$ est de multiplicité 2 et $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_0 = 1$

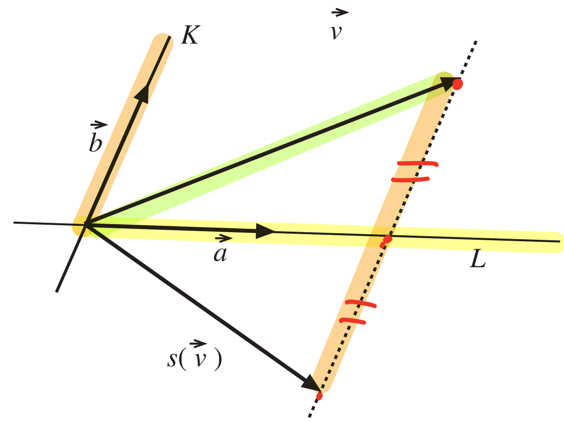
2. $q(\vec{a}) = \vec{0}$; $q(\vec{b}) = \vec{0}$ et $q(\vec{c}) = \vec{c}$ et $(Q)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 0$ est de multiplicité 2 et $\dim E_0 = 2$ et $\dim E_1 = 1$ □

Remarque 3.2. Une projection p vérifie forcément $p \circ p = p$. En effet, vous prouverez en exercices que si $p \circ p = p$, alors les seules valeurs propres possibles sont 0 et 1. La réciproque est évidente.

4 Symétries vectorielles du plan

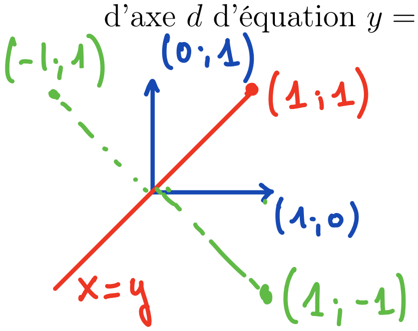
Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non colinéaires de V_2. L'application s qui associe à tout vecteur $\vec{v}$ son symétrique $s(\vec{v})$ relativement à la droite vectorielle $L = \langle \vec{a} \rangle$ parallèlement à la droite vectorielle $K = \langle \vec{b} \rangle$ est une application linéaire.



Proposition 4.1. *Une application linéaire $\alpha : V_2 \to V_2$ est une symétrie si et seulement si elle possède les valeurs propres -1 et 1.*
Dans ce cas, α est une symétrie relativement à E_1 parallèlement à E_{-1}.

$s(\vec{a}) = \vec{a}$
$s(\vec{b}) = -\vec{b}$

Exemple 4.2. Dans V_2 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$, on considère la symétrie orthogonale s d'axe d d'équation $y = x$. Déterminer la matrice de s relativement à $\mathcal{B}$.



$s((1;0)) = (0;1)$ et $s((0;1)) = (1;0)$

$(A)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $B = ((1;0);(0;1))$

$s((1;1)) = 1 \cdot (1;1)$

$s((1;-1)) = -1\,(1;-1) = (-1;1)$

Relativement à $B^* = ((1;1);(1;-1))$,

$(A)_{B^*}^{B^*} = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

On peut vérifier que $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ d'où $S^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

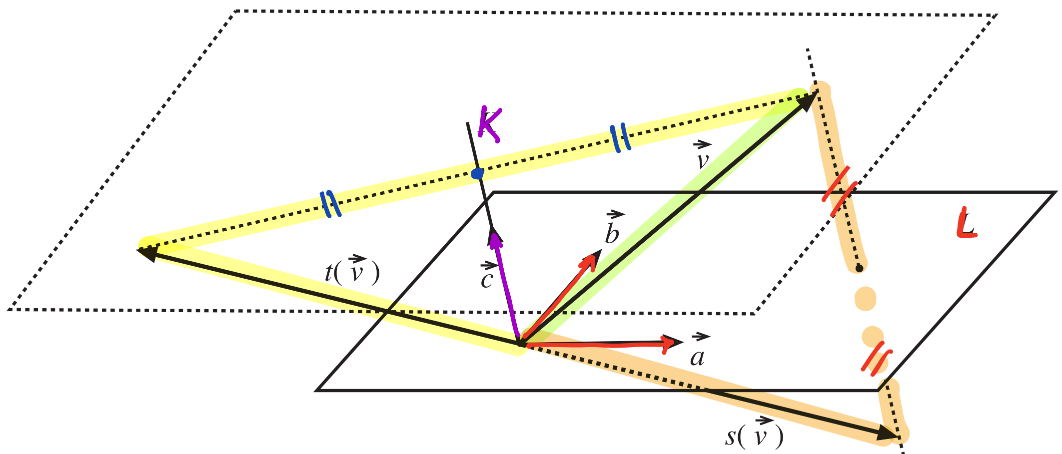
$(A)_B^B = S \cdot D \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5 Symétries vectorielles de l'espace

Soit $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

- L'application s qui associe à tout vecteur $\vec{v}$ son symétrique $s(\vec{v})$ relativement au plan vectoriel $L = \langle \vec{a}; \vec{b} \rangle$ parallèlement à la droite vectorielle $K = \langle \vec{c} \rangle$ est une application linéaire.
- L'application t qui associe à tout vecteur $\vec{v}$ son symétrique $t(\vec{v})$ relativement à la droite vectorielle $K = \langle \vec{c} \rangle$ parallèlement au plan vectoriel $L = \langle \vec{a}; \vec{b} \rangle$ est une application linéaire.
- Les symétries s et t sont liées par la relation

$$t(\vec{v}) = -s(\vec{v})$$



Proposition 5.1. *Une application linéaire $\alpha : V_3 \to V_3$ est une symétrie si et seulement si elle possède les valeurs propres -1 et 1 et si l'un des espaces propres est de dimension 2.*
Dans ce cas, α est une symétrie relativement à E_1 parallèlement à E_{-1}.

Remarque 5.2. Une symétrie s vérifie forcément $s \circ s = Id$. En effet, on prouvera en exercices que si $s \circ s = Id$, alors les seules valeurs propres possibles sont 1 et -1.

Exemple 5.3. Dans l'exemple 4.5 du cours VII, on considérait l'endomorphisme $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique était

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres étaient 1 et -1 (double) et la matrice était diagonalisable.
Il s'agit donc d'une symétrie relativement à la droite $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = E_1$ dans la direction du plan $E_{-1} = \langle (1;0;1) ; (0;1;0) \rangle$.

Exemple 5.4. Dans V_3 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$, on considère la symétrie vectorielle orthogonale s relativement à la droite d d'équation $x = -y = z$.
Déterminer la matrice de s relativement à $\mathcal{B}$.

$$E_1 = \langle (1 ; -1 ; 1) \rangle \qquad (\text{car } x = -y = z)$$

$$E_{-1} = \langle (1 ; 1 ; 0) ; (0 ; 1 ; 1) \rangle$$

Dans $B^* = \big((1 ; -1 ; 1) ; (1 ; 1 ; 0) ; (0 ; 1 ; 1) \big)$,

$$A_{B^*}^{B^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A^*$$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de B^* et B

On calcule P^{-1} avec notre méthode et on obtient

$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Par suite,

$$A = P \cdot A^* \cdot P^{-1} = \dots\dots = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$