Corrigé 14 : solides en rotation

Exercices d'introduction

A Saut en moto

Lorsque le système motard-moto est en l'air, il ne subit que son poids comme force extérieure (on néglige les frottements de l'air). Le moment de ce poids par rapport au centre de masse est nul, donc le moment cinétique total du sytème par rapport au centre de masse est constant.

1. Si le motard freine la roue arrière, il diminue le moment cinétique de la roue, donc la conservation du moment cinétique total implique une mise en rotation de l'ensemble du système dans le même sens que la roue arrière, donc la moto pique du nez.
2. S'il freine avec la roue avant, il va se passer exactement la même chose.
3. Seule la roue arrière est motorisée. En ré-accélérant la roue arrière, le motard pourra arrêter la rotation de la moto (s'il redonne à la roue arrière sa vitesse de rotation initiale). Ainsi en freinant la roue arrière ou en donnant des gaz, le motard pourra garder sa vitesse de rotation sous contrôle pendant le saut.

B Toupie

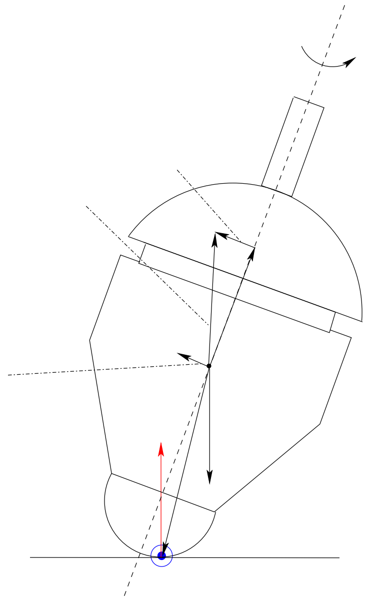
Lorsque la toupie est penchée, elle roule sur le sol. Les frottements au point de contact O induisent une force $\vec{F}_c$ qui s'oppose au mouvement de rotation (ralentissement de la rotation par dissipation d'énergie). La force $\vec{F}_c$ est donc dans le plan du sol, colinéaire au mouvement de translation de la toupie.
L'évolution du moment cinétique ($\vec{L} = I\vec{\omega}$) est donnée par le théorème du moment cinétique appliqué au centre de masse G :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} = \overrightarrow{GO} \wedge \vec{F}_c + \overrightarrow{GO} \wedge \vec{N}\ . \tag{1}$$

Le moment exercé par la pesanteur en G est nul car $\overrightarrow{GG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$.

— On observe que la variation du moment cinétique a une composante due au moment de la force de soutien $\vec{N}$. Ce moment est parallèle à $\vec{F}_c$ et est responsable de la précession de la toupie : l'axe de rotation de la toupie va tourner autour de la direction de la force $\vec{N}$.

— Une autre composante de la variation du moment cinétique est colinéaire au moment exercé par la force de frottement $\vec{F}_c$, et qui tend à aligner $\vec{L}$ avec la verticale : la toupie se redresse (voir figure). En position verticale, la toupie n'a plus de mouvement de translation (le centre de masse est devenu immobile). Les frottements n'exercent plus aucun moment en dehors de l'axe : l'orientation de $\vec{L}$ ne varie plus : la position est stable.

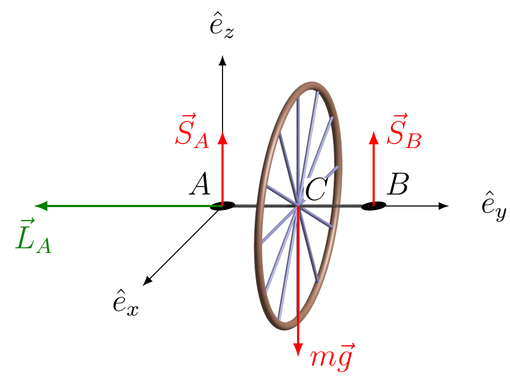


C Roue soutenue par l'une des extrémités de son axe

Initialement, l'objet formé de la roue et de son axe, de masse m, subit son poids et le soutien en A et B. La roue est à l'équilibre : la somme des forces et la somme des moments de force, en particulier par rapport à A, sont nulles.

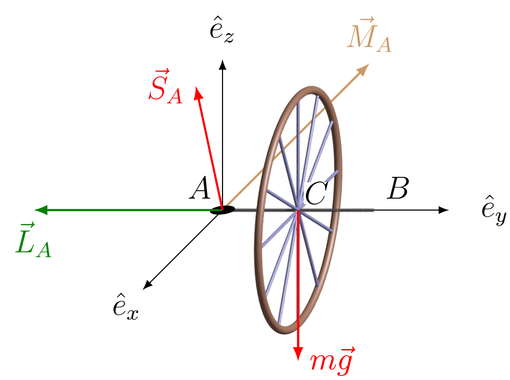
$$\vec{F} = \vec{S}_A + \vec{S}_B + m\vec{g} = \vec{0}\,,$$

$$\vec{M}_A = \underbrace{\overrightarrow{AA}}_{\vec{0}} \wedge \vec{S}_A + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{S}_B + \overrightarrow{AC} \wedge m\vec{g} = \vec{0}\,.$$



En absence de soutien en B, l'équilibre est rompu :

$$\vec{M}_A = \overrightarrow{AC} \wedge m\vec{g} \neq \vec{0}\,.$$

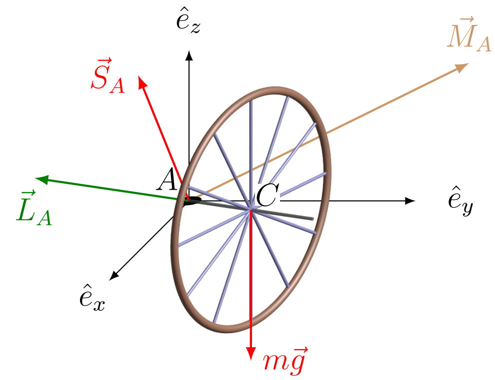


Le moment du poids par rapport à A est horizontal, car normal au plan vertical défini par A, C et $m\vec{g}$. Selon le théorème du moment cinétique

$$\vec{M}_A = \dot{\vec{L}}_A\,,$$

le moment cinétique $\vec{L}_A$ est modifié horizontalement et reste donc à tout instant horizontal.

L'axe de la roue pivote autour de l'axe vertical passant par A : c'est un mouvement de précession. A cela vient s'ajouter une inclinaison de l'axe de la roue par rapport à l'horizontale, inclinaison qui dépend de la vitesse angulaire de rotation de la roue : plus la vitesse de rotation de la roue est grande, plus l'inclinaison est faible. A ce mouvement se superpose enfin une oscillation de cette inclinaison, appelée nutation.
Lien : https://youtu.be/GEKtnlZfksI



D Freinage d'un cylindre en rotation

On exploite le théorème du moment cinétique et on résout l'équation différentielle obtenue en devinant la forme de la solution.

1. Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation fixe s'écrit, selon $\hat{e}_z$ choisi pointant dans le plan de la feuille,

$$M_O = -RF = -kR\omega = \dot{L}_O = I_O\dot{\omega} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\omega}\,.$$

On obtient alors l'équation différentielle

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{2k}{mR}\,\omega(t)\,.$$

2. On devine que cette équation différentielle a pour solution une fonction $\omega(t)$ de type exponentielle. On va donc poser, dans le cas le plus général,

$$\omega(t) = Ae^{Bt}\,,$$

où A et B sont des constantes.
L'accélération angulaire s'écrit alors

$$\dot{\omega}(t) = BAe^{Bt} = B\omega(t)\,,$$

si bien que

$$A = \omega(0) = \omega_0 \quad \text{et} \quad B = -\frac{2k}{mR}\,.$$

La vitesse angulaire a ainsi finalement pour expression

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{2k}{mR}t}\,.$$

Problèmes

1 Tige en rotation

Les forces qui s'appliquent sur la tige sont son poids $M\vec{g}$, appliqué à son centre de masse G situé à une distance $L/2$ du point O, et une force de soutien $\vec{T}$ d'orientation inconnue au point O.
Le théorème du centre de masse s'exprime comme

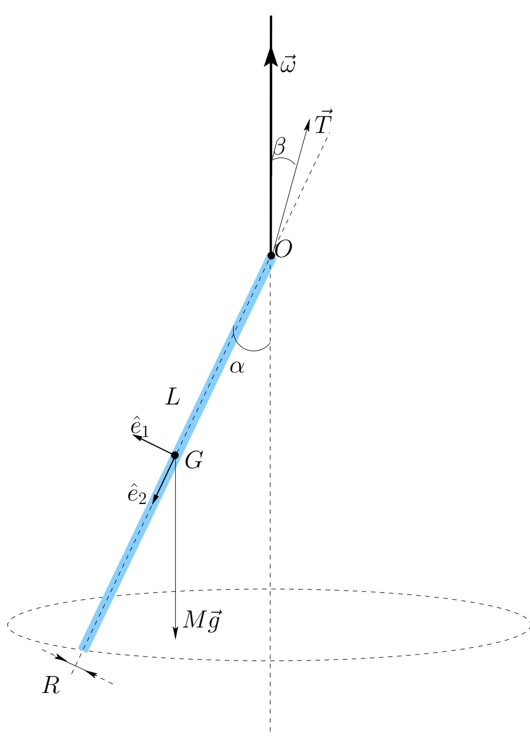
$$M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{a}_G \,, \tag{2}$$

où $\vec{a}_G$ est l'accélération du centre de masse. Puisque le mouvement de G est circulaire uniforme, son accélération est horizontale et de norme $a_G = \frac{v_G^2}{r_G} = \omega^2 r_G = \omega^2 \frac{L}{2} \sin\alpha$. La projection sur des axes verticaux et horizontaux dans le plan de la tige et de l'axe de rotation donne

$$\begin{aligned} T\cos\beta &= Mg \,, & (3)\\ T\sin\beta &= M\omega^2 \frac{L}{2}\sin\alpha \,, & (4) \end{aligned}$$

où l'angle β est l'angle formé par la force $\vec{T}$ et la verticale. On note ici que $\vec{T}$ est dans le plan formé par $\vec{\omega}$ et $\overrightarrow{OG}$, puisque ni le poids de la tige ni l'accélération de son centre de masse n'ont de composante perpendiculaire à ce plan.
Pour exprimer le moment cinétique, on choisit un repère d'inertie au point G défini par $\hat{e}_2 \equiv \frac{\overrightarrow{OG}}{|\overrightarrow{OG}|}$, $\hat{e}_3 \equiv \frac{\vec{\omega}\wedge\hat{e}_2}{|\vec{\omega}\wedge\hat{e}_2|}$ et $\hat{e}_1 \equiv \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3$.
Dans ce repère, la vitesse angulaire s'écrit

$$\vec{\omega} = \omega\sin\alpha\,\hat{e}_1 - \omega\cos\alpha\,\hat{e}_2 \,. \tag{5}$$



Le moment cinétique $\vec{L}_G$ est donné par

$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega}\,. \tag{6}$$

La tige est un cylindre de longueur L et de rayon R, et donc son tenseur d'inertie vaut (pour le repère choisi)

$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

En injectant les expressions (5) et (7) dans l'équation (6), on obtient :

$$\vec{L}_G = \left(\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2\right)\omega \sin\alpha \hat{e}_1 - \frac{1}{2}MR^2\omega\cos\alpha\hat{e}_2\,. \tag{8}$$

En utilisant la formule de Poisson $\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i$, on trouve la dérivée par rapport au temps de $\vec{L}_G$:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_G}{dt} &= \left(\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2\right)\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha\,\hat{e}_3 - \frac{1}{2}MR^2\omega^2\cos\alpha\sin\alpha\,\hat{e}_3 \\ &= \left(\frac{1}{12}ML^2 - \frac{1}{4}MR^2\right)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\,\hat{e}_3 \end{aligned} \tag{9}$$

Le théorème du moment cinétique par rapport au centre de masse s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \overrightarrow{GO} \wedge \vec{T} + \underbrace{\overrightarrow{GG}}_{=\vec{0}} \wedge M\vec{g}\,. \tag{10}$$

Sa projection sur $\hat{e}_3$ donne :

$$\left(\frac{1}{12}ML^2 - \frac{1}{4}MR^2\right)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{L}{2}T\sin(\alpha-\beta) = \frac{L}{2}(T\cos\beta\sin\alpha - T\sin\beta\cos\alpha)\,. \tag{11}$$

En utilisant les équations (3) et (4), on trouve une relation qui ne dépend pas de T :

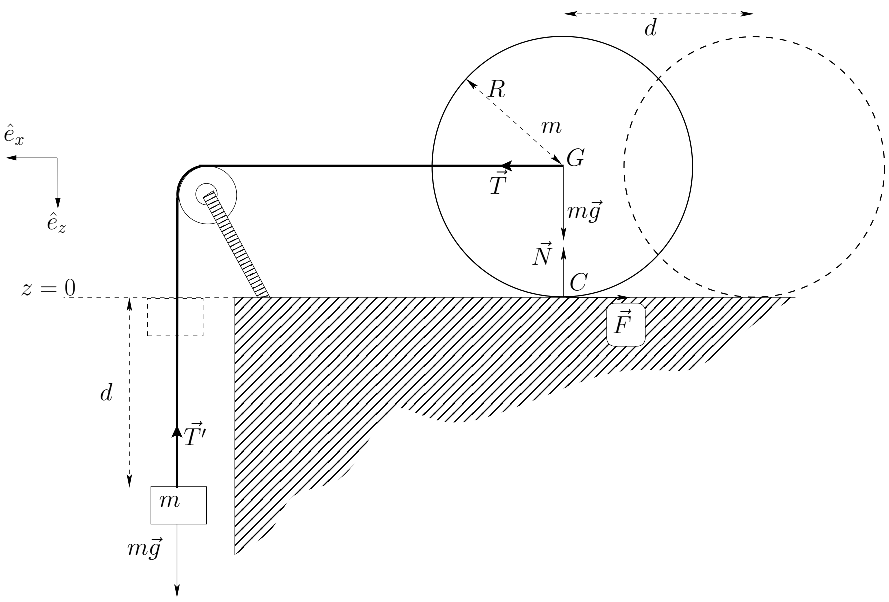
$$\left(\frac{1}{12}ML^2 - \frac{1}{4}MR^2\right)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{L}{2}(Mg\sin\alpha - M\omega^2\frac{L}{2}\sin\alpha\cos\alpha)\,. \tag{12}$$

Les solutions de cette équation sont soit $\sin\alpha = 0$, soit

$$\cos\alpha = \frac{6Lg}{(4L^2 - 3R^2)\omega^2}\,. \tag{13}$$

Cette deuxième solution n'existe que si $\omega^2 > \frac{6Lg}{4L^2-3R^2}$.

2 Roue tirée par un bloc



a) Les forces subies par la roue sont son poids $m\vec{g}$, la force $\vec{N}$ de soutien de la table, la force de frottement statique $\vec{F}$ (nécessaire au roulement sans glissement) et la force $\vec{T}$ exercée par le fil. Les forces subies par le bloc sont son poids $m\vec{g}$ et la force $\vec{T}'$ exercée par le fil. Le poids de la roue ne travaille pas car il est perpendiculaire au déplacement du centre de masse. Les forces $\vec{N}$ et $\vec{F}$ ne travaillent pas car elles s'appliquent sur le point C de la roue en contact avec la table et $\vec{v}_C = \vec{0}$ (roulement sans glissement). Les travaux des forces $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ sont opposés et se compensent donc. Le poids du bloc travaille, mais dérive de l'énergie potentielle $-mgz$ où z est un axe vertical vers le bas. Le système formé de la roue et du bloc est donc conservatif ; son énergie mécanique

$$E = E_{\text{cin,roue}} + E_{\text{cin,bloc}} - mgz \tag{14}$$

est conservée. Soit x un axe horizontal de la roue vers la poulie. Puisque le fil garde toujours la même longueur, la vitesse $\dot{x}$ du centre de masse G de la roue est égale à la vitesse $\dot{z}$ du bloc. La vitesse angulaire de rotation instantanée de la roue est égale à $\omega = \dot{x}/R$ (car $\vec{v}_G = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG}$). Le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe de révolution vaut $I = \frac{1}{2}mR^2$. Ainsi :

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz = \frac{1}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgz = \frac{5}{4}m\dot{x}^2 - mgz\,. \tag{15}$$

On n'a pas inclus le terme d'énergie potentielle de la roue dans l'expression ci-dessus, car le poids de la roue ne travaille pas (donc cette énergie potentielle est une constante qu'on peut arbitrairement mettre à zéro).

On place l'origine de l'axe z de telle sorte que $E = 0$ lorsque $\dot{x} = 0$ (situation initiale). Lorsque la roue a avancé d'une distance d, on a $z = d$ et la vitesse v du centre de masse de la roue doit satisfaire à

$$\frac{5}{4}mv^2 - mgd = 0 \tag{16}$$

pour conserver l'énergie. On a donc

$$v = 2\sqrt{\frac{gd}{5}}\,. \tag{17}$$

b) Pour que la roue ne glisse pas, il faut que la force de frottement statique ne dépasse pas sa valeur maximale,

$$F \leq \mu_s N = \mu_s mg\,, \tag{18}$$

c'est-à-dire que le coefficient de frottement statique doit être suffisamment grand :

$$\mu_s \geq \frac{F}{mg}\,. \tag{19}$$

Afin de déterminer F, on applique les lois fondamentales de la dynamique :

$$m\ddot{z} = mg - T' \quad : \quad \text{2ème loi de Newton appliquée au bloc,} \tag{20}$$

$$m\ddot{x} = T - F \quad : \quad \text{2ème loi de Newton appliquée à la roue,} \tag{21}$$

$$I\dot{\omega} = RF \quad : \quad \text{théorème du moment cinétique appliqué à la roue.} \tag{22}$$

Avec $\dot{z} = \dot{x}$, $\omega = \dot{x}/R$, $I = \frac{1}{2}mR^2$ et $T' = T$ (la tension du fil est partout la même), ce système d'équations devient

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg - T \\ m\ddot{x} = T - F \\ m\ddot{x} = 2F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{2}{5}g \\ T = \frac{3}{5}mg \\ F = \frac{1}{5}mg\,. \end{cases} \tag{23}$$

Ainsi, on doit avoir

$$\mu_s \geq \frac{1}{5} = 0.2\,. \tag{24}$$

3 Boule de bowling

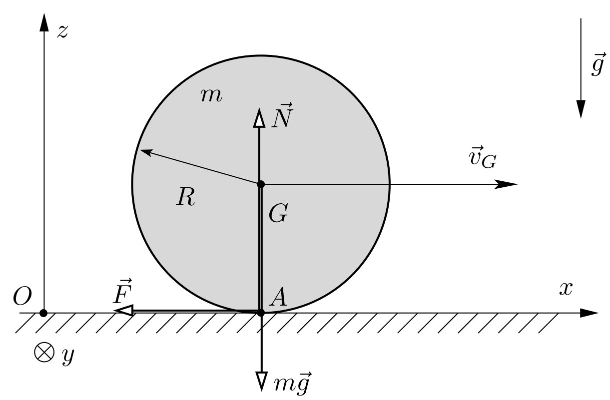
a) On choisit un repère droit tel que $\hat{x}$ est horizontal, dans la direction et le sens de la vitesse initiale $\vec{v}_G\,(t_0)$, et $\hat{z}$ vertical, vers le haut.

Les forces s'exerçant sur la boule sont :

— son poids $m\vec{g} = -mg\hat{z}$, vertical vers le bas, et s'appliquant au centre de masse G;

— la réaction du sol $\vec{N} = N\hat{z}$, verticale vers le haut, s'appliquant au point de contact A de la boule sur le sol;

— la force de frottement cinétique $\vec{F} = -\mu_c N\hat{x}$, horizontale et opposée à $\vec{v}_G$, s'appliquant au point A.



b) Les équations du mouvement de la boule sont données par le théorème du centre de masse et le théorème du moment cinétique. Les contraintes du mouvement imposent que l'accélération $\vec{a}_G = \ddot{x}_G\hat{x} + \ddot{y}_G\hat{y} + \ddot{z}_G\hat{z}$ du centre de masse est horizontale, donc que la composante verticale $\ddot{z}_G$ de l'accélération est nulle, et que la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\hat{y}$ est parallèle à $\hat{y}$. Le théorème du centre de masse donne

$$m\vec{a}_G = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_G = -\mu_c N \\ m\ddot{y}_G = 0 \\ m\ddot{z}_G = 0 = -mg + N \end{cases} \tag{25}$$

En éliminant N de ces équations, on trouve

$$m\ddot{x}_G = -\mu_c mg \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_G = -\mu_c g. \tag{26}$$

Le théorème du moment cinétique appliqué par rapport au centre de masse G s'écrit

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \sum_i \vec{M}_{G,i}\mathrm{F} = \underbrace{\overrightarrow{GG} \wedge m\vec{g}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{GA} \wedge \vec{N}}_{=0} + \overrightarrow{GA} \wedge \vec{F} \tag{27}$$

$$= (-R\hat{z}) \wedge (-\mu_c mg\hat{x}) = R\mu_c mg\hat{y} \tag{28}$$

L'axe parallèle à $\hat{y}$ passant par G est un axe principal d'inertie de la boule, donc le moment cinétique par rapport au centre de masse s'exprime comme

$$\vec{L}_G = I_G\vec{\omega} = I_G\omega\hat{y} = \frac{2}{5}mR^2\omega\hat{y}. \tag{29}$$

Seule la projection sur $\hat{y}$ du théorème du moment cinétique est non triviale :

$$\frac{2}{5}mR^2\dot{\omega} = R\mu_c mg \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{5}{2}\frac{\mu_c g}{R}. \tag{30}$$

Solution alternative (1) : on peut appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à un point O fixe du sol, par exemple le point de contact de la boule et du sol au temps t_0. Le théorème du moment cinétique s'écrit alors

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O\mathrm{F} = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{N} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} \tag{31}$$

$$= x_G mg\hat{y} - x_G mg\hat{y} + 0 = 0. \tag{32}$$

Le moment cinétique par rapport au point O est obtenu à l'aide du théorème du transfert

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}_G + I_G\vec{\omega} = (mR\dot{x}_G + I_G\omega)\,\hat{y}. \tag{33}$$

La projection sur $\hat{y}$ du théorème du moment cinétique donne

$$mR\ddot{x}_G + I_G\dot{\omega} = mR\ddot{x}_G + \frac{2}{5}mR^2\dot{\omega} = 0. \tag{34}$$

Solution alternative (2) : on peut également prendre le point de contact A comme référence, mais ce point a une vitesse non nulle car le mouvement est avec glissement entre t_0 et t_1. Il faut donc appliquer le théorème du moment cinétique de la façon suivante :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A - \vec{v}_A \wedge m\vec{v}_G. \tag{35}$$

Comme la vitesse du point A est parallèle à $\vec{v}_G$, le dernier terme est nul. Tous les moments des forces par rapport à A sont nuls. De plus, l'expression pour le moment cinétique est identique à l'expression obtenue précédemment ($\vec{L}_A = \vec{L}_O$, Eq. (33)). On trouve alors la même équation que l'équation (34), ci-dessus.

c) En intégrant l'équation (26), on trouve, en tenant compte des conditions initiales,

$$\dot{x}_G(t) = -\mu_c g t + v_0, \tag{36}$$

et de l'équation (30), en tenant compte de la vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 0$, on obtient

$$\omega(t) = \frac{mR}{I_G}\mu_c g t = \frac{5}{2}\frac{\mu_c g}{R} t. \tag{37}$$

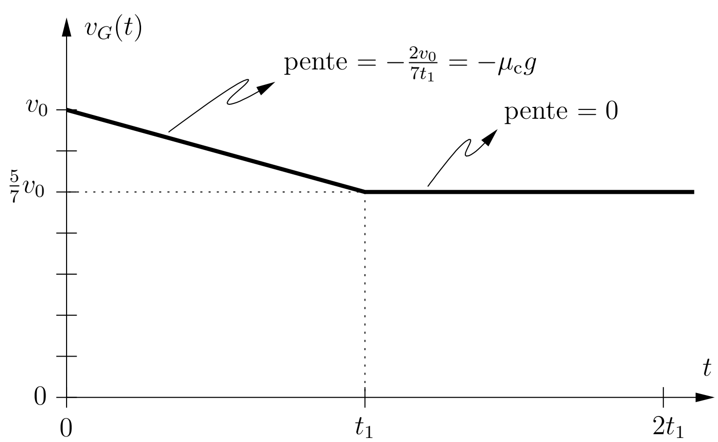
La condition de roulement sans glissement est que la vitesse du point de contact avec le sol soit nulle, $\vec{v}_A = \vec{0}$. Cette condition permet de relier la vitesse du centre de masse $\vec{v}_G$ à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$

$$\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG} = \vec{0} + \omega R \hat{y} \wedge \hat{z} = \omega R \hat{x} \Rightarrow \dot{x}_G = \omega R. \tag{38}$$

Le temps t_1 correspond alors à l'instant auquel la condition $\dot{x}_G(t_1) = \omega(t_1) R$ est vérifiée. En utilisant les équations (12) et (13), on trouve

$$-\mu_c g t_1 + v_0 = \frac{mR}{I_G}\mu_c g t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{I_G}{I_G + mR^2}\frac{v_0}{\mu_c g} = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_c g}. \tag{39}$$

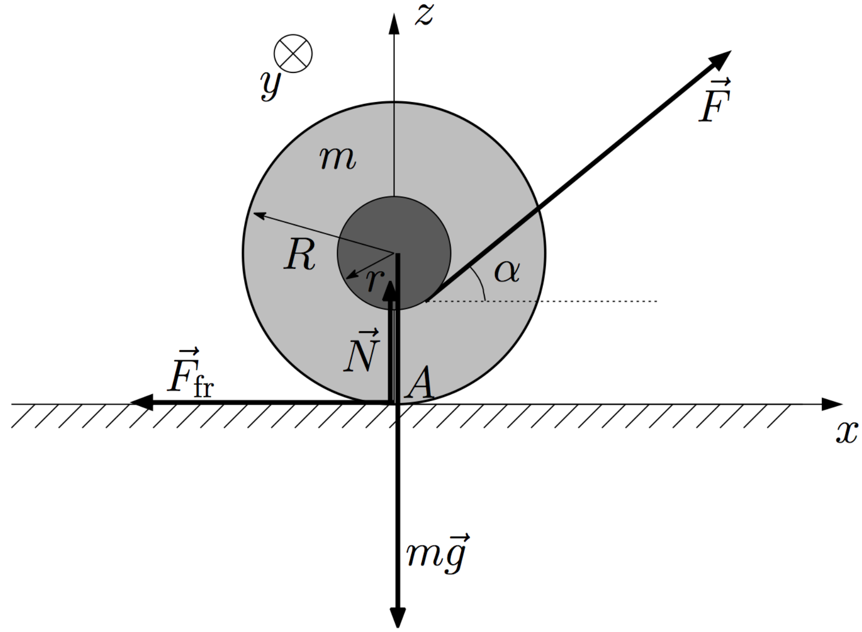
d) Entre les temps $t_0 = 0$ et t_1, la vitesse du centre de masse v_G décroit linéairement à partir de v_0, comme indiqué par l'équation (36). Au temps t_1, au moment où la roue cesse de glisser, la force de frottement cinétique s'annule, et une force de frottement statique pourrait entrer en jeu pour contrer la composante horizontale d'une force extérieure au système. A partir du temps t_1, les seules forces extérieures qui s'appliquent sur la boule sont le poids et la réaction du sol, toutes deux verticales. La force de frottement statique est donc nulle. Par le théorème du centre de masse, l'accélération du centre de masse est nulle également, donc v_G reste constante pour $t \geq t_1$.



4 Bobine tirée par un fils

On choisit un repère $Oxyz$ droit, d'origine O au point de contact A de la bobine avec le sol, d'axe $\hat{z}$ vertical dirigé vers le haut, et d'axe $\hat{x}$ horizontal et dirigé dans le sens de la projection horizontale de la force $\vec{F}$.

a) Les forces qui s'appliquent sur la bobine sont :
- le poids $m\vec{g}$ de la bobine, appliquée en son centre de masse.
- la force de soutien $\vec{N}$ de la bobine, dirigée vers le haut, et appliquée au point de contact de la bobine avec le sol.
- la force de frottement statique $\vec{F}_{\rm fr}$ de la bobine avec le sol, parallèle à $\hat{x}$, et appliquée au point de contact de la bobine avec le sol.
- la force $\vec{F}$ du fil sur la bobine, formant un angle α avec l'axe Ox, et appliquée tangentiellement au cylindre de rayon r en un point de coordonnées $r\sin\alpha$ (horizontale) et $-r\cos\alpha$ (verticale) relativement au centre de la bobine.



b) Les équations du mouvement sont données par les théorèmes du centre de masse et du moment cinétique.

En projection sur les axes Ox et Oz, le théorème du centre de masse donne :

$$F\cos\alpha + F_{{\rm fr},x} = m\ddot{x} \tag{40}$$

$$N - mg + F\sin\alpha = 0 \Rightarrow N = mg - F\sin\alpha > 0\,. \tag{41}$$

On applique le théorème du moment cinétique par rapport au centre de masse de la bobine. Les moments sont tous parallèles à $\hat{y}$, et on écrit la projection selon cet axe :

$$-Fr - F_{{\rm fr},x}R = I\dot{\omega}\,. \tag{42}$$

Puisque le roulement est sans glissement, on a la relation $\ddot{x} = R\dot{\omega}$.

On peut alors réécrire l'équation (40) comme

$$F\cos\alpha + F_{{\rm fr},x} = mR\dot{\omega}\,, \tag{43}$$

que l'on combine avec l'équation (42) pour éliminer $F_{\mathrm{fr},x}$ et trouver l'accélération angulaire

$$\dot{\omega} = \frac{F(R\cos\alpha - r)}{I + mR^2}\,. \tag{44}$$

<u>*Solution alternative :*</u> On peut écrire les moments par rapport au point de contact A de la bobine avec le sol. Dans ce cas, le seul moment non nul est celui appliqué par la force $\vec{F}$:

$$\begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ 0 \\ R - r\cos\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F\cos\alpha \\ 0 \\ F\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ RF\cos\alpha - rF \\ 0 \end{pmatrix} = I_A\dot{\vec{\omega}}\,. \tag{45}$$

En utilisant le théorème de Steiner, on trouve

$$I_A = I + mR^2\,. \tag{46}$$

La composante selon $\hat{y}$ de l'équation (45) devient

$$RF\cos\alpha - rF = (I + mR^2)\dot{\omega}\,, \tag{47}$$

d'où l'on trouve l'accélération angulaire

$$\dot{\omega} = \frac{F(R\cos\alpha - r)}{I + mR^2}\,. \tag{48}$$

c) Le système est à l'équilibre statique si $\dot{\omega} = 0$. Ceci est réalisé si

$$\cos\alpha = \frac{r}{R}\,, \tag{49}$$

ce qui correspond à la situation dans laquelle la force $\vec{F}$ n'applique aucun moment par rapport au point de contact de la bobine avec le sol.