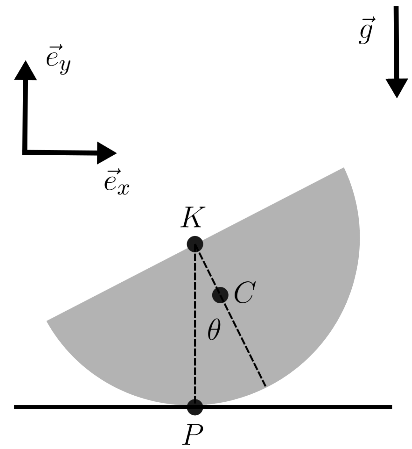
Corrigé 14 : solides en rotation

1 Oscillation d'un demi-cylindre plein



Coupe du demi-cylindre au milieu de sa longueur.

a) Le plan Kxy est un plan de symmétrie du demi-cylindre. Par conséquent, la normale à ce plan, $\vec{e}_z$, est un axe principal d'inertie du solide.

b) On peut résoudre cette question en utilisant soit l'énergie mécanique, soit le théorème du moment cinétique. On vous propose les deux corrections ci-dessous.

Via l'énergie mécanique :

Le cylindre est soumis à trois forces : la force de pesanteur $\vec{P} = m\vec{g}$ s'appliquant en C, les forces de réaction $\vec{R}$ et de frottement $\vec{F}$ s'appliquant en P. Comme le solide roule sans glissement, la vitesse de P est nulle. Le travail de ces forces étant donné par

$$W = \int dt(\vec{F} + \vec{R}).\vec{v}_P,$$

ces forces ne travaillent pas et l'énergie mécanique est conservée.

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique du système et de son énergie potentielle. Commencons par l'énergie cinétique, celle-ci est donnée par :

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_{C,z}\dot{\theta}^2,$$

où $I_{C,z}$ est le moment d'inertie en C selon l'axe principal $\vec{e}_z$. Le théorème de Huygens-Steiner nous donne :

$$I_{K,z} = I_{C,z} + mKC^2 \Leftrightarrow I_{C,z} = I_{K,z} - mKC^2 = \frac{1}{2}mr^2 - m\frac{16r^2}{9\pi^2} = \frac{9\pi^2 - 32}{18\pi^2}mr^2.$$

De plus, le solide est en roulement sans glissement, ce qui nous donne

$$\vec{v}_C = \vec{v}_P + \overrightarrow{CP} \wedge (\dot{\theta}\vec{e}_z) = \overrightarrow{CP} \wedge (\dot{\theta}\vec{e}_z)$$

Par conséquent,

$$v_C^2 = \dot{\theta}^2\overrightarrow{CP}^2 = \dot{\theta}^2(\overrightarrow{CP})^2 = \dot{\theta}^2(\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KP})^2 = \dot{\theta}^2(\overrightarrow{KC}^2 + r^2 - 2rKC\cos\theta).$$

Passons maintenant à l'énergie potentielle : la masse peut être considérée comme si elle était au point C, et donc

$$E_{pot} = mgy_C = mg(r - KC\cos\theta).$$

L'énergie mécanique est finalement donnée par :

$$E = \frac{1}{2}\left(I_{C,z} + m(KC^2 + r^2 - 2rKC\cos\theta)\right)\dot{\theta}^2 + mg(r - KC\cos\theta).$$

Celle-ci est conservée, et on peut donc obtenir les équations du moment en la dérivant par rapport au temps.

$$\frac{dE}{dt} = \left(I_{C,z} + m(KC^2 + r^2 - 2rKC\cos\theta)\right)\dot{\theta}\ddot{\theta} + rmKC\dot{\theta}^3\sin\theta + mgKC\dot{\theta}\sin\theta = 0.$$

$$\left(I_{C,z} + m(KC^2 + r^2 - 2rKC\cos\theta)\right)\ddot{\theta} + rmKC\dot{\theta}^2\sin\theta + mgKC\sin\theta = 0.$$

Dans la limite des petits angles θ, en admettant que $\dot{\theta}$ est aussi petit, on peut simplifier cette équation en :

$$\left(I_{C,z} + m(KC^2 + r^2 - 2rKC)\right)\ddot{\theta} + mgKC\theta = 0.$$

On obtient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

avec

$$\omega_0^2 = \frac{mgKC}{I_{C,z} + m(KC - r)^2}.$$

$$\omega_0^2 = \frac{mg\frac{4r}{3\pi}}{\frac{9\pi^2-32}{18\pi^2}mr^2 + m(\frac{4r}{3\pi} - r)^2} = \frac{g}{r}\frac{8}{9\pi - 16}$$

La période des oscillations est donnée par

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Via le théorème du moment cinétique :

La fréquence des petites oscillations autour de l'équilibre peut être également établie en appliquant le thèoreme du moment cinétique au point de contact P. Comme les forces de frottement et de réaction du sol ne s'appliquent qu'au point P, la somme des moments de forces extérieures se réduit au moment de force du poids. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_P}{dt} &= \overrightarrow{PC} \wedge m\vec{g} \\ &= (\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KC}) \wedge m\vec{g}. \end{aligned}$$

Dans le repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, les vecteurs $\overrightarrow{PK}$ et $\overrightarrow{KC}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PK} &= r\vec{e}_y, \\ \overrightarrow{KC} &= \frac{4r}{3\pi}\big(\sin\theta\vec{e}_x - \cos\theta\vec{e}_y\big). \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_P}{dt} &= \overrightarrow{PC} \wedge m\vec{g} \\ &= \left[\frac{4r}{3\pi}\sin\theta\vec{e}_x + \left(r - \frac{4r}{3\pi}\cos\theta\right)\vec{e}_y\right] \wedge -mg\vec{e}_y \\ &= -\frac{4mgr}{3\pi}\sin\theta\vec{e}_z.\end{aligned} \tag{1}$$

Par ailleurs, le moment cinétique au point P est donné par $\vec{L}_P = I_{P,z}\dot{\theta}\vec{e}_z$. Pour obtenir l'équation de mouvement de l'angle θ, il faut calculer le moment d'inertie en P selon l'axe $\vec{e}_z$. Par le théorème de Huygens-Steiner, on a

$$\begin{aligned}I_{P,z} &= I_{C,z} + m(\overrightarrow{CP})^2 \\ &= I_{K,z} - m(\overrightarrow{CK})^2 + m(\overrightarrow{CP})^2.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{CP})^2 - (\overrightarrow{CK})^2 &= \left[\left(r - \frac{4r}{3\pi}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{4r}{3\pi}\sin\theta\right)^2\right] - \left[\left(\frac{4r}{3\pi}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{4r}{3\pi}\sin\theta\right)^2\right] \\ &= r^2 - \frac{8r^2}{3\pi}\cos\theta.\end{aligned}$$

Donc, le moment d'inertie en P selon l'axe $\vec{e}_z$ est égal à

$$I_{P,z} = \frac{3}{2}mr^2 - \frac{8mr^2}{3\pi}\cos\theta.$$

Dans l'approximation des petits angles, le moment d'inertie en P se réduit à :

$$I_{P,z} = \frac{3}{2}mr^2 - \frac{8mr^2}{3\pi} \tag{2}$$

De même, le moment de force du poids est donné dans cette limite par

$$-\frac{4mgr}{3\pi}\theta\vec{e}_z. \tag{3}$$

Il suit alors de l'équation (1) que l'équation du mouvement de l'angle θ est donnée par

$$\left(\frac{3}{2}mr^2 - \frac{8mr^2}{3\pi}\right)\ddot{\theta} = -\frac{4mgr}{3\pi}\theta.$$

On retrouve donc l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega_0^2 = \frac{\frac{4mgr}{3\pi}}{\frac{3}{2}mr^2 - \frac{8mr^2}{3\pi}} = \frac{g}{r}\frac{8}{9\pi - 16}.$$

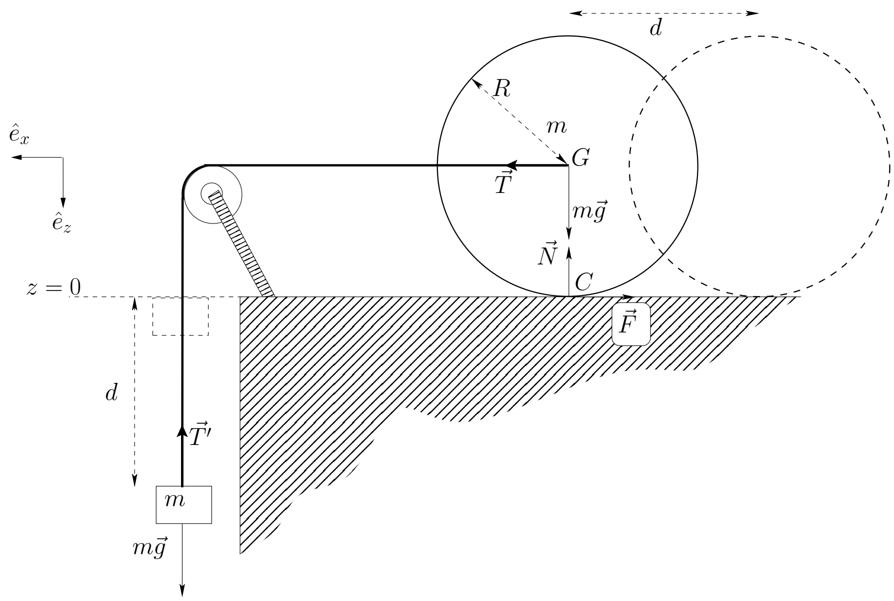
Remarque :

L'énergie cinétique du système peut être calculée en considérant le point de contact P. Comme la vitesse de ce point est nulle, l'expression de l'énergie cinétique ne contient que la contribution de la rotation du cylindre autour de l'axe passant par P et selon $\vec{e}_z$, i.e.

$$E_{cin} = \frac{1}{2}I_{P,z}\dot{\theta}^2.$$

c) Les seuls changements viennent du déplacement du centre de masse et du moment d'inertie principal. Le centre de masse reste aligné sur l'axe vertical quand $\theta = 0$, et seule sa distance à K change. De même l'axe $\vec{e}_z$ reste un axe principal d'inertie, et il suffit de changer I_K/I_C selon la forme choisie.

2 Roue tirée par un bloc



a) Les forces subies par la roue sont son poids $m\vec{g}$, la force $\vec{N}$ de soutien de la table, la force de frottement statique $\vec{F}$ (nécessaire au roulement sans glissement) et la force $\vec{T}$ exercée par le fil. Les forces subies par le bloc sont son poids $m\vec{g}$ et la force $\vec{T}'$ exercée par le fil. Le poids de la roue ne travaille pas car il est perpendiculaire au déplacement du centre de masse. Les forces $\vec{N}$ et $\vec{F}$ ne travaillent pas car elles s'appliquent sur le point C de la roue en contact avec la table et $\vec{v}_C = \vec{0}$ (roulement sans glissement). Les travaux des forces $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ sont opposés et se compensent donc. Le poids du bloc travaille, mais dérive de l'énergie potentielle $-mgz$ où z est un axe vertical vers le bas. Le système formé de la roue et du bloc est donc conservatif ; son énergie mécanique

$$E = E_{\text{cin,roue}} + E_{\text{cin,bloc}} - mgz \tag{4}$$

est conservée. Soit x un axe horizontal de la roue vers la poulie. Puisque le fil garde toujours la même longueur, la vitesse $\dot{x}$ du centre de masse G de la roue est égale à la vitesse $\dot{z}$ du bloc. La vitesse angulaire de rotation instantanée de la roue est égale à $\omega = \dot{x}/R$ (car $\vec{v_G} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG}$). Le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe de révolution vaut $I = \frac{1}{2}mR^2$. Ainsi :

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz = \frac{1}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgz = \frac{5}{4}m\dot{x}^2 - mgz\,. \tag{5}$$

On n'a pas inclus le terme d'énergie potentielle de la roue dans l'expression ci-dessus, car le poids de la roue ne travaille pas (donc cette énergie potentielle est une constante qu'on peut arbitrairement mettre à zéro).

On place l'origine de l'axe z de telle sorte que $E = 0$ lorsque $\dot{x} = 0$ (situation initiale). Lorsque la roue a avancé d'une distance d, on a $z = d$ et la vitesse v du centre de masse de la roue doit satisfaire à

$$\frac{5}{4}mv^2 - mgd = 0 \tag{6}$$

pour conserver l'énergie. On a donc

$$v = 2\sqrt{\frac{gd}{5}}\,. \tag{7}$$

b) Pour que la roue ne glisse pas, il faut que la force de frottement statique ne dépasse pas sa valeur maximale,

$$F \leq \mu_{\mathrm{s}} N = \mu_{\mathrm{s}} mg\,, \tag{8}$$

c'est-à-dire que le coefficient de frottement statique doit être suffisamment grand :

$$\mu_{\mathrm{s}} \geq \frac{F}{mg}\,. \tag{9}$$

Afin de déterminer F, on applique les lois fondamentales de la dynamique :

$$m\ddot{z} = mg - T' \quad : \quad \text{2ème loi de Newton appliquée au bloc,} \tag{10}$$

$$m\ddot{x} = T - F \quad : \quad \text{2ème loi de Newton appliquée à la roue,} \tag{11}$$

$$I\dot{\omega} = RF \quad : \quad \text{théorème du moment cinétique appliqué à la roue.} \tag{12}$$

Avec $\dot{z} = \dot{x}$, $\omega = \dot{x}/R$, $I = \frac{1}{2}mR^2$ et $T' = T$ (la tension du fil est partout la même), ce système d'équations devient

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg - T \\ m\ddot{x} = T - F \\ m\ddot{x} = 2F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{2}{5}g \\ T = \frac{3}{5}mg \\ F = \frac{1}{5}mg\,. \end{cases} \tag{13}$$

Ainsi, on doit avoir

$$\mu_{\mathrm{s}} \geq \frac{1}{5} = 0.2\,. \tag{14}$$

3 Suggestion de minitest : Boule de bowling

Correction : `https://moodle.epfl.ch/pluginfile.php/3394590/mod_folder/content/0/Boule_de_bowling-solution.pdf?forcedownload=1` sur Moodle