

Corrigé Série 13 : Dynamique des solides

Exercices d'introduction

A Moment d'inertie d'une bouteille

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Δ fixe dépend du carré des distances d_α^2 à l'axe de chacun des éléments de masse m_α selon la relation $I_\Delta = \sum_\alpha m_\alpha d_\alpha^2$. Dans le cas de la bouteille, c'est par rapport à l'axe A que les carrés des distances sont en moyenne les plus petites, donc $I_1 = I_A$. Par un même raisonnement basé sur la géométrie de la bouteille, on trouve que $I_2 = I_C$, $I_3 = I_D$, et $I_4 = I_B$.

B Moment d'inertie d'anneaux

Selon le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

$$\vec{M}_{\text{axe}} = I_{\text{axe}} \dot{\vec{\omega}}_{\text{axe}},$$

pour un moment de force donné, plus le moment d'inertie est grand, plus l'accélération angulaire est petite.

Par définition,

$$I_{\text{axe}} = \int_{\text{corps}} r_{\perp \text{axe}}^2 dm.$$

Plus un élément de masse dm est éloigné de l'axe, plus sa contribution au moment d'inertie est importante. Par conséquent,

$$I_B < I_C < I_A.$$

Remarque : $I_B = \frac{1}{2}mR^2$ et $I_A = mR^2$.

C Cube suspendu

- a) Comme les trois moments d'inertie par rapport au centre de masse G sont égaux, la matrice d'inertie est proportionnelle à l'identité. Donc, tout vecteur est un vecteur propre de cette matrice. Par conséquent, tout axe Δ passant par G est un axe principal d'inertie et le moment d'inertie associé est égal à $I_\Delta = \frac{Ma^2}{6}$.
- b) Le cube est invariant par rotation de $2\pi/3$ autour de l'axe vertical passant par A. Il s'en suit que c'est un axe de symétrie et donc un axe principal d'inertie.

- c) Comme cet axe passe par le centre de masse G , le moment d'inertie est donné par

$$I_{A,v} = I_{G,v} = \frac{Ma^2}{6}, \quad (1)$$

où $I_{G,v}$ est le moment d'inertie au centre de masse G du cube par rapport à l'axe vertical.

- d) Chacune des trois arêtes connectées au point A définit avec l'arête qui lui est opposée un plan de symétrie vertical. Ces trois plans passent par le centre du cube et contiennent donc le centre de masse G .
- e) L'axe orthogonal au plan de symétrie vertical et passant par A est un axe principal d'inertie. Par le théorème de Huyghens-Steiner, on a

$$I_{A,h} = I_{G,h} + Md^2 \quad (2)$$

où $I_{G,h} = \frac{Ma^2}{6}$ est le moment d'inertie par rapport à l'axe horizontal passant par le centre de masse G et $d = a\sqrt{3}/2$ est la distance entre les points A et G . On obtient donc

$$I_{A,h} = \frac{11}{12}Ma^2. \quad (3)$$

- f) Considérons un axe \vec{e}_h dans le plan horizontal et appelons \vec{e}_1 et \vec{e}_2 deux des axes principaux d'inertie déterminés à la question c). Le vecteur de rotation $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_h$ se décompose comme

$$\vec{\omega} = \omega_1\vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2. \quad (4)$$

Il s'en suit que le moment cinétique prend la forme

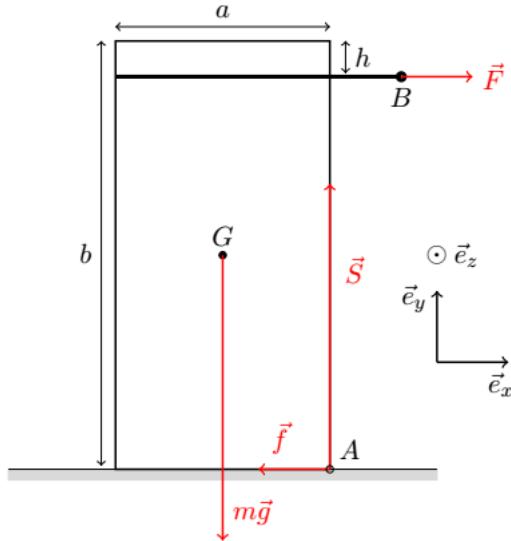
$$\vec{L}_A = I_{A,h}\omega_1\vec{e}_1 + I_{A,h}\omega_2\vec{e}_2 = I_{A,h}\omega\vec{e}_h. \quad (5)$$

On conclut qu'un axe horizontal quelconque dirigé selon \vec{e}_h et passant par A est un axe principal d'inertie.

Problèmes

1 Bloc de pierre

Le système considéré est le bloc (supposé homogène). Ce dernier subit quatre forces : son poids $m\vec{g}$, la force \vec{F} exercée par la corde, ainsi que la force de soutien \vec{S} (liaison) et la force de frottement statique \vec{f} exercées par le sol. A l'équilibre, les sommes des forces et des moments de force sont nulles (par rapport



à tout point fixe O). La loi de Newton,

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{S} + \vec{f} = \vec{0},$$

est insuffisante pour trouver les forces inconnues (\vec{S} et \vec{f}). Il est donc nécessaire d'utiliser le fait que la somme des moments est nulle. Le poids s'applique au centre de masse G et la force \vec{F} en B . Lorsque le bloc de pierre pivote autour de A , le soutien \vec{S} et le frottement \vec{f} s'appliquent en A . En calculant les moments de force par rapport à A , ceux de \vec{S} et \vec{f} sont nuls, et on trouve :

$$\begin{aligned}\vec{M}_A &= \vec{M}_A(\vec{F}) + \vec{M}_A(m\vec{g}) + \vec{M}_A(\vec{S}) + \vec{M}_A(\vec{f}) \\ &= \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{g} + \underbrace{\overrightarrow{AA} \wedge \vec{S}}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{AA} \wedge \vec{f}}_{\vec{0}} \\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Selon \vec{e}_z ,

$$-(b-h)\vec{F} + \frac{a}{2}m\vec{g} + 0 + 0 = 0.$$

Cette dernière relation fournit directement la norme de la tension dans la corde :

$$F = \frac{amg}{2(b-h)} \cong 401.3 \text{ N},$$

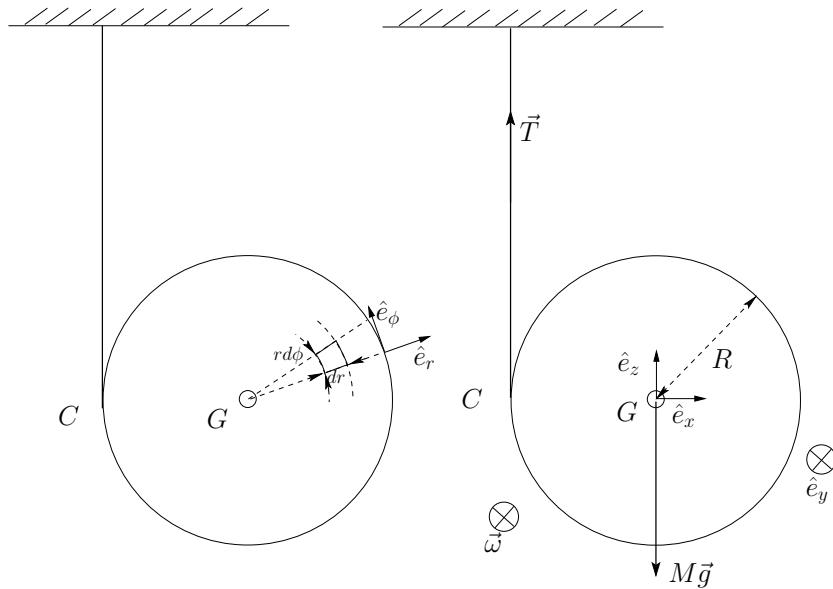
où l'on a posé $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Remarque : on est maintenant en mesure de déterminer \vec{S} et \vec{f} en exploitant la loi de Newton (ou en choisissant de calculer les moments par rapport à d'autres points, p.ex. le point sur la corde à la verticale de A).

2 Yoyo

- a) En remarquant que le disque est un cas particulier du cylindre où la hauteur de ce dernier est nulle, on déduit du résultat du cours que le moment d'inertie d'un disque par rapport à son axe de symétrie de révolution est donné par

$$I_{\text{disque}} = \frac{1}{2}MR^2. \quad (6)$$



- b) Pour résoudre ce problème, on va utiliser les équations du mouvement du yoyo. Les forces qui s'appliquent sur le yoyo sont son poids $\vec{P} = M\vec{g}$, dirigé vers le bas, et la tension dans le fil \vec{T} , dirigée vers le haut. Les équations du mouvement sont données d'une part par le théorème du centre de masse (deuxième loi de Newton appliquée au centre de masse) qui projeté sur \hat{e}_z donne

$$-Ma_G = -Mg + T, \quad (7)$$

et d'autre part par le théorème du moment cinétique par rapport au centre de masse G :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = I_{\text{disque}}\dot{\omega}\hat{e}_y = \Sigma\vec{M}_G = \overrightarrow{GG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{GC} \wedge \vec{T}.$$

qui projeté sur \hat{e}_y donne

$$I_{\text{disque}}\dot{\omega} = RT. \quad (8)$$

Tous les points du fil ont une vitesse nulle y compris donc au point de contact C ($v_C = 0$). On a ainsi $\vec{v}_G = \underbrace{\vec{v}_C}_{=0} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG}$ (\vec{v}_G pointe bien vers le bas) donc la vitesse et l'accélération angulaire du disque sont reliées par

$$v_G = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v_G}{R} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{a_G}{R}. \quad (9)$$

En combinant les équations (6), (8) et (9), on obtient

$$\frac{1}{2}MR^2 \frac{a_G}{R} = R(Mg - Ma_G).$$

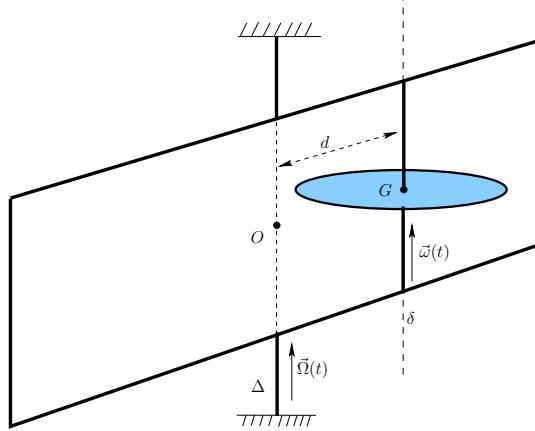
En résolvant pour a_G , on trouve

$$a_G = \frac{2}{3}g. \quad (10)$$

Et par substitution dans l'équation (7), on obtient :

$$T = M(g - a_g) = M\left(g - \frac{2}{3}g\right) = \frac{Mg}{3}. \quad (11)$$

3 Volant et châssis



- a) Le volant tourne autour d'un axe principal d'inertie avec une vitesse angulaire de rotation totale $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$; son moment cinétique par rapport au point G vaut ainsi

$$\vec{L}_{v,G} = I_{v,\delta} (\vec{\omega} + \vec{\Omega}). \quad (12)$$

On obtient son moment cinétique par rapport à O par le théorème du transfert :

$$\vec{L}_{v,O} = \vec{L}_{v,G} + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}_G = I_{v,\delta} (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}_G. \quad (13)$$

Le point O étant immobile et les points G et O appartenant tous deux au châssis, leurs vitesses doivent satisfaire

$$\vec{v}_G = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG}. \quad (14)$$

Le châssis tourne également autour d'un axe principal d'inertie et son moment cinétique par rapport à O vaut

$$\vec{L}_{c,O} = I_{c,\Delta} \vec{\Omega}. \quad (15)$$

En combinant les relations ci-dessus, le moment cinétique total du système volant+châssis par rapport à O vaut alors :

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\text{tot},O} &= \vec{L}_{c,O} + \vec{L}_{v,O} &= I_{c,\Delta} \vec{\Omega} + I_{v,\delta} (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) + \overrightarrow{OG} \wedge m(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG}) \\ &= I_{c,\Delta} \vec{\Omega} + I_{v,\delta} (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) + m \left(\overrightarrow{OG}^2 \vec{\Omega} - (\overrightarrow{OG} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{OG} \right) \\ &= I_{c,\Delta} \vec{\Omega} + I_{v,\delta} (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) + md^2 \vec{\Omega} \\ \Rightarrow \vec{L}_{\text{tot},O} &= (I_{c,\Delta} + I_{v,\delta} + md^2) \vec{\Omega} + I_{v,\delta} \vec{\omega}. \end{aligned} \quad (16)$$

- b) Les seules forces horizontales extérieures au système volant+chassis s'appliquent sur l'axe du chassis et donc le système ne subit aucun moment de force extérieur vertical. La composante verticale du moment cinétique total (par rapport à n'importe quel point du référentiel) est ainsi constante. Le moment cinétique total par rapport au point O , donné par l'équation (16), est vertical et est donc un vecteur constant au cours du temps. En particulier, on a

$$\vec{L}_{\text{tot},O}(t_1) = \vec{L}_{\text{tot},O}(t_0),$$

ce qui donne

$$(I_{c,\Delta} + I_{v,\delta} + md^2) \vec{\Omega}(t_1) + I_{v,\delta} \underbrace{\vec{\omega}(t_1)}_{=\vec{0}} = (I_{c,\Delta} + I_{v,\delta} + md^2) \underbrace{\vec{\Omega}(t_0)}_{=\vec{0}} + I_{v,\delta} \vec{\omega}_0,$$

et donc

$$\vec{\Omega}(t_1) = \frac{I_{v,\delta}}{I_{c,\Delta} + I_{v,\delta} + md^2} \vec{\omega}_0. \quad (17)$$

- c) Les forces de freinage sur le châssis sont extérieures au système volant+châssis ; elles exercent un moment vertical qui modifie le moment cinétique total entre t_1 et t_2 . Considérons uniquement le volant : entre les temps t_1 et t_2 . D'après le schéma, le volant est lié au châssis au point G , donc les forces de liaison s'appliquent en G , tout comme le poids du volant. Donc aucune des forces sur le volant n'a un moment par rapport au point G , c'est pourquoi le moment cinétique du volant par rapport au point G reste constant,

$$\vec{L}_{v,G}(t_2) = \vec{L}_{v,G}(t_1),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} I_{v,\delta} (\vec{\omega}(t_2) + \underbrace{\vec{\Omega}(t_2)}_{=\vec{0}}) &= I_{v,\delta} (\underbrace{\vec{\omega}(t_1)}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}(t_1)), \\ I_{v,\delta} \vec{\omega}(t_2) &= I_{v,\delta} \vec{\Omega}(t_1), \end{aligned}$$

et donc, en utilisant l'équation (17) :

$$\vec{\omega}(t_2) = \vec{\Omega}(t_1) = \frac{I_{v,\delta}}{I_{c,\Delta} + I_{v,\delta} + md^2} \vec{\omega}_0. \quad (18)$$

- d) Comme vu au cours, un point C sur l'axe instantané de rotation du volant doit satisfaire à

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GC} &= \frac{(\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \vec{v}_G}{(\vec{\omega} + \vec{\Omega})^2} = \frac{(\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG})}{(\vec{\omega} + \vec{\Omega})^2} \\ &= \frac{((\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \cdot \overrightarrow{OG}) \vec{\Omega} - ((\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{OG}}{(\vec{\omega} + \vec{\Omega})^2} \\ &= -\frac{(\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \cdot \vec{\Omega}}{(\vec{\omega} + \vec{\Omega})^2} \overrightarrow{OG} = -\frac{(\omega + \Omega)\Omega}{(\omega + \Omega)^2} \overrightarrow{OG} = -\frac{\Omega}{\omega + \Omega} \overrightarrow{OG}, \end{aligned} \quad (19)$$

et donc

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} = \left(1 - \frac{\Omega}{\omega + \Omega}\right) \overrightarrow{OG} = \frac{\omega}{\omega + \Omega} \overrightarrow{OG}. \quad (20)$$

L'axe de rotation instantané du volant est vertical et passe par le point C situé entre les points O et G à une distance $\omega d / (\omega + \Omega)$ du point O . Quand $\vec{\Omega}(t) = \vec{0}$, par exemple aux temps t_0 ou t_2 , $C = G$ et l'axe de rotation instantané est δ ; quand $\vec{\omega}(t) = \vec{0}$, par exemple au temps t_1 , $C = O$ et l'axe de rotation instantané est Δ .

1 Oscillation d'un demi-cylindre plein

- a) Le plan Kxy est un plan de symétrie du demi-cylindre. Par conséquent, la normale à ce plan, \vec{e}_z , est un axe principal d'inertie du solide.
- b) On peut résoudre cette question en utilisant soit l'énergie mécanique, soit le théorème du moment cinétique. On vous propose les deux corrections ci-dessous.

Via l'énergie mécanique :

Le cylindre est soumis à trois forces : la force de pesanteur $\vec{P} = m\vec{g}$ s'appliquant en C , les forces de réaction \vec{R} et de frottement \vec{F} s'appliquant en P . Comme le solide roule sans glissement, la vitesse de P est nulle. Le travail de ces forces étant donné par

$$W = \int dt(\vec{F} + \vec{R}) \cdot \vec{v}_P,$$

ces forces ne travaillent pas et l'énergie mécanique est conservée.

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique du système et de son énergie potentielle. Commençons par l'énergie cinétique, celle-ci est donnée par :

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_{C,z}\dot{\theta}^2,$$

où $I_{C,z}$ est le moment d'inertie en C selon l'axe principal \vec{e}_z . Le théorème de Huygens-Steiner nous donne :

$$I_{K,z} = I_{C,z} + mKC^2 \Leftrightarrow I_{C,z} = I_{K,z} - mKC^2 = \frac{1}{2}mr^2 - m\frac{16r^2}{9\pi^2} = \frac{9\pi^2 - 32}{18\pi^2}mr^2.$$

De plus, le solide est en roulement sans glissement, ce qui nous donne

$$\vec{v}_C = \vec{v}_P + \overrightarrow{CP} \wedge (\dot{\theta}\vec{e}_z) = \overrightarrow{CP} \wedge (\dot{\theta}\vec{e}_z)$$

Par conséquent,

$$v_C^2 = \dot{\theta}^2 \overrightarrow{CP}^2 = \dot{\theta}^2 (\overrightarrow{CP})^2 = \dot{\theta}^2 (\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KP})^2 = \dot{\theta}^2 (\overrightarrow{KC}^2 + r^2 - 2rKC \cos \theta).$$

Passons maintenant à l'énergie potentielle : la masse peut être considérée comme si elle était au point C , et donc

$$E_{pot} = mgyc = mg(r - KC \cos \theta).$$

L'énergie mécanique est finalement donnée par :

$$E = \frac{1}{2} (I_{C,z} + m(KC^2 + r^2 - 2rKC \cos \theta)) \dot{\theta}^2 + mg(r - KC \cos \theta).$$

Celle-ci est conservée, et on peut donc obtenir les équations du moment en la dérivant par rapport au temps.

$$\frac{dE}{dt} = (I_{C,z} + m(KC^2 + r^2 - 2rKC \cos \theta)) \ddot{\theta} + rmKC\dot{\theta}^3 \sin \theta + mgKC\dot{\theta} \sin \theta = 0.$$

$$(I_{C,z} + m(KC^2 + r^2 - 2rKC \cos \theta)) \ddot{\theta} + rmKC\dot{\theta}^2 \sin \theta + mgKC \sin \theta = 0.$$

Dans la limite des petits angles θ , en admettant que $\dot{\theta}$ est aussi petit, on peut simplifier cette équation en :

$$(I_{C,z} + m(KC^2 + r^2 - 2rKC)) \ddot{\theta} + mgKC\theta = 0.$$

On obtient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{mgKC}{I_{C,z} + m(KC - r)^2}. \\ \omega_0^2 &= \frac{mg \frac{4r}{3\pi}}{\frac{9\pi^2 - 32}{18\pi^2} mr^2 + m(\frac{4r}{3\pi} - r)^2} = \frac{g}{r} \frac{8}{9\pi - 16} \end{aligned}$$

La période des oscillations est donnée par

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Via le théorème du moment cinétique :

La fréquence des petites oscillations autour de l'équilibre peut être également établie en appliquant le théorème du moment cinétique au point de contact P . Comme les forces de frottement et de réaction du sol ne s'appliquent qu'au point P , la somme des moments de forces extérieures se réduit au moment de force du poids. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_P}{dt} &= \overrightarrow{PC} \wedge m\vec{g} \\ &= (\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KC}) \wedge m\vec{g}. \end{aligned}$$

Dans le repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, les vecteurs \overrightarrow{PK} et \overrightarrow{KC} sont donnés par

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PK} &= r\vec{e}_y, \\ \overrightarrow{KC} &= \frac{4r}{3\pi} (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y). \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_P}{dt} &= \overrightarrow{PC} \wedge m\vec{g} \\ &= \left[\frac{4r}{3\pi} \sin \theta \vec{e}_x + \left(r - \frac{4r}{3\pi} \cos \theta \right) \vec{e}_y \right] \wedge -mg\vec{e}_y \\ &= -\frac{4mgr}{3\pi} \sin \theta \vec{e}_z. \end{aligned} \tag{21}$$

Par ailleurs, le moment cinétique au point P est donné par $\vec{L}_P = I_{P,z} \dot{\theta} \vec{e}_z$. Pour obtenir l'équation de mouvement de l'angle θ , il faut calculer le moment d'inertie en P selon l'axe \vec{e}_z . Par le théorème de Huygens-Steiner, on a

$$\begin{aligned} I_{P,z} &= I_{C,z} + m(\overrightarrow{CP})^2 \\ &= I_{K,z} - m(\overrightarrow{CK})^2 + m(\overrightarrow{CP})^2. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{CP})^2 - (\overrightarrow{CK})^2 &= \left[\left(r - \frac{4r}{3\pi} \cos \theta \right)^2 + \left(\frac{4r}{3\pi} \sin \theta \right)^2 \right] - \left[\left(\frac{4r}{3\pi} \cos \theta \right)^2 + \left(\frac{4r}{3\pi} \sin \theta \right)^2 \right] \\ &= r^2 - \frac{8r^2}{3\pi} \cos \theta. \end{aligned}$$

Donc, le moment d'inertie en P selon l'axe \vec{e}_z est égal à

$$I_{P,z} = \frac{3}{2}mr^2 - \frac{8mr^2}{3\pi} \cos \theta.$$

Dans l'approximation des petits angles, le moment d'inertie en P se réduit à :

$$I_{P,z} = \frac{3}{2}mr^2 - \frac{8mr^2}{3\pi} \quad (22)$$

De même, le moment de force du poids est donné dans cette limite par

$$-\frac{4mgr}{3\pi} \theta \vec{e}_z. \quad (23)$$

Il suit alors de l'équation (21) que l'équation du mouvement de l'angle θ est donnée par

$$\left(\frac{3}{2}mr^2 - \frac{8mr^2}{3\pi} \right) \ddot{\theta} = -\frac{4mgr}{3\pi} \theta.$$

On retrouve donc l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega_0^2 = \frac{\frac{4mgr}{3\pi}}{\frac{3}{2}mr^2 - \frac{8mr^2}{3\pi}} = \frac{g}{r} \frac{8}{9\pi - 16}.$$

Remarque :

L'énergie cinétique du système peut être calculée en considérant le point de contact P . Comme la vitesse de ce point est nulle, l'expression de l'énergie cinétique ne contient que la contribution de la rotation du cylindre autour de l'axe passant par P et selon \vec{e}_z , i.e.

$$E_{cin} = \frac{1}{2} I_{P,z} \dot{\theta}^2.$$

- c) Les seuls changements viennent du déplacement du centre de masse et du moment d'inertie principal. Le centre de masse reste aligné sur l'axe vertical quand $\theta = 0$, et seule sa distance à K change. De même l'axe \vec{e}_z reste un axe principal d'inertie, et il suffit de changer I_K/I_C selon la forme choisie.