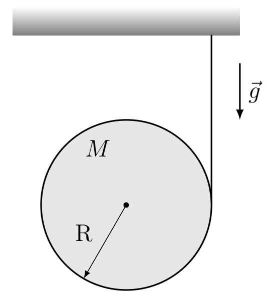
Série 13 : Dynamique des solides

1 L'échelle

Une échelle de masse m et de longueur L est appuyée contre un mur vertical. L'angle entre le mur et l'échelle vaut α et le coefficient de frottement entre le pied de l'échelle et le sol vaut μ. Il n'y a pas de frottement entre l'échelle et le mur.
Quelle est la valeur maximale α_{max} que peut prendre l'angle α avant que le pied de l'échelle ne se mette à glisser sur le sol et que l'échelle ne tombe par terre ?

2 Yoyo

Un yoyo consiste en un disque homogène de rayon R et de masse M, autour duquel un fil sans masse est enroulé. Le fil est attaché au plafond et reste en tout temps vertical, et le yoyo est libre de descendre sous l'action de la gravité.



a) Rappeler, d'après le cours, l'expression du moment d'inertie I du disque autour d'un axe perpendiculaire au plan du disque et passant par son centre.

b) Déterminer l'accélération $\vec{a}$ du centre de masse du yoyo, ainsi que la tension $\vec{T}$ dans le fil.

3 Volant et châssis

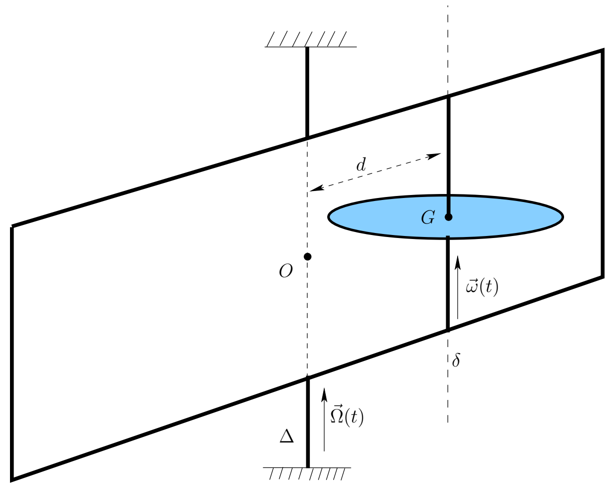
Un volant horizontal peut tourner autour d'un axe vertical δ passant par son centre de masse G. Cet axe est solidaire d'un châssis pouvant tourner autour d'un autre axe vertical Δ. Les deux axes sont séparés d'une distance d et on note O le point de l'axe Δ à une distance d du point G. Le volant (resp. le châssis tout seul) a une masse m (resp. M) et admet l'axe δ (resp. Δ) comme axe principal d'inertie, par rapport auquel il a un moment d'inertie $I_{\text{v},\delta}$ (resp. $I_{\text{c},\Delta}$). Le volant et le châssis sont équipés chacun d'un système de freinage (sans masse) qui permet, par l'application d'un couple de force, de les immobiliser autour de leur axe de rotation. Soient $\vec{\omega}(t)$ la vitesse angulaire de rotation propre du volant (par rapport au châssis) et $\vec{\Omega}(t)$ la vitesse angulaire de rotation propre du châssis.

a) Donner l'expression du moment cinétique total du système volant+châssis par rapport au point O.

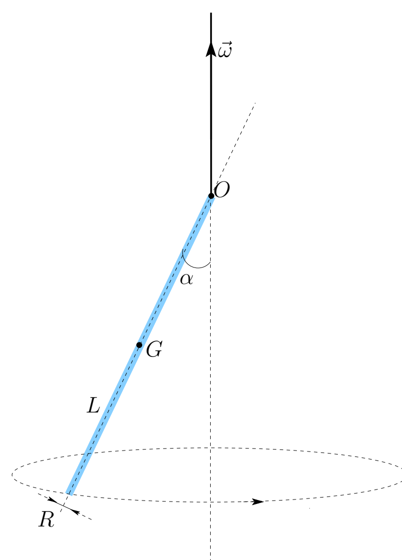
b) Initialement, à $t = t_0$, on a $\vec{\omega}(t_0) = \vec{\omega}_0$ et $\vec{\Omega}(t_0) = \vec{0}$. On enclenche le système de freinage du volant jusqu'à ce que, pour un temps $t_1 > t_0$ on obtienne $\vec{\omega}(t_1) = \vec{0}$. Que vaut alors $\vec{\Omega}(t_1)$?

c) Au temps t_1, on relâche le frein du volant et on active le frein du châssis jusqu'à ce que, pour un temps $t_2 > t_1$ on obtienne $\vec{\Omega}(t_2) = \vec{0}$. Que vaut alors $\vec{\omega}(t_2)$?

d) A un temps t quelconque, où se trouve l'axe de rotation instantané du volant ?



4 Tige en rotation



Une tige cylindrique homogène de masse M, de longueur L et de rayon $R \ll L$ est attachée à une de ses extrémités en un point fixe O, et tourne avec un vitesse angulaire $\vec{\omega}$ constante autour d'un axe vertical passant par O (voir dessin). Le vecteur $\vec{\omega}$ pointe vers le haut. La tige est soumise au champ de pesanteur $\vec{g}$, et est libre de prendre toute orientation autour du point O. Déterminer l'angle α de l'axe de la tige par rapport à la verticale.
Indication : $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.

Elements de réponse

Exercice1 : $\alpha_{\text{max}} = \arctan(2\mu)$
Exercice 2 : $T = \frac{Mg}{3}$
Exercice 3 :

$$\vec{\Omega}(t_1) = \frac{I_{\text{v},\delta}}{I_{\text{c},\Delta} + I_{\text{v},\delta} + md^2}\,\vec{\omega}_0 \tag{1}$$

Exercice 4 : L'angle α est donné par la solution de l'équation suivante :

$$\left(\frac{1}{12}ML^2 - \frac{1}{4}MR^2\right)\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{L}{2}(Mg\sin\alpha - M\omega^2\frac{L}{2}\sin\alpha\cos\alpha) \tag{2}$$