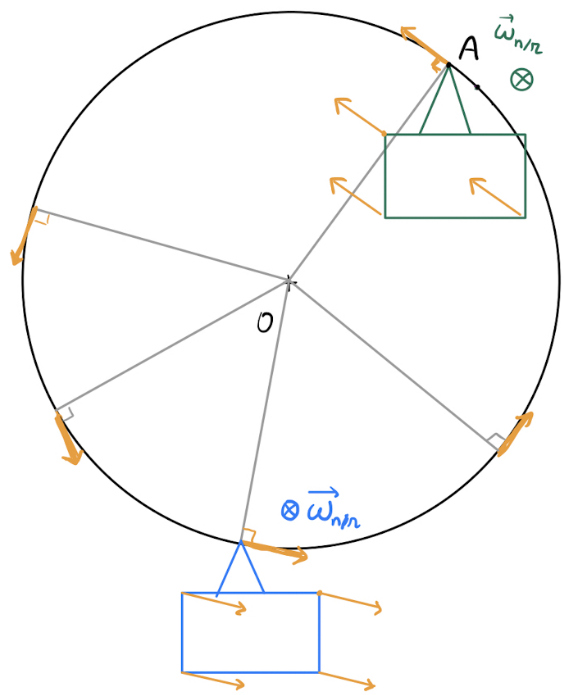
Corrigé Série 12 : cinématique du solide

Exercices d'introduction

A La grande roue

Le schéma suivant montre l'allure du champ des vitesses de la roue et de celui de la nacelle :



1. Le mouvement de la roue est une rotation autour d'un axe horizontal fixe passant par O. A chaque instant, le centre instantané de rotation se trouve en O.
2. Dans le référentiel inertiel lié au sol, la nacelle reste en tout temps verticale, car elle est libre de pivoter autour de son point d'attache à la grande roue. Le champ des vitesses est celui d'une translation, même si chaque point de la nacelle décrit un grand cercle. Le vecteur rotation de la nacelle dans le référentiel est donc nul : $\vec{\omega}_{\text{nacelle/sol}} = \vec{0}$, et le centre instantané de rotation n'existe pas (on peut aussi dire qu'il se trouve à l'infini, perpendiculaire aux vecteurs vitesse).
3. En applicant l'additivité des vecteurs rotation, on a :

$$\vec{0} = \vec{\omega}_{\text{nacelle/sol}} = \vec{\omega}_{\text{nacelle/roue}} + \vec{\omega}_{\text{roue/sol}}$$

d'où

$$\vec{\omega}_{\text{nacelle/roue}} = -\vec{\omega}_{\text{roue/sol}} = -\vec{\omega}$$

La nacelle tourne donc autour de la roue, en sens inverse de la roue par rapport au sol.

B Moment de force : Bras de levier

1. On exploite la définition du moment de force par rapport à A :

$$\vec{M}_A = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}\,.$$

Selon $\hat{e}_z$, la norme du moment de force s'écrit

$$M_A = RF\sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = RF\cos\alpha\,,$$

où $F = ||\vec{F}||\,.$

- Pour $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, la rotation induite est de sens trigonométrique et le moment $\vec{M}_A$ est **sortant** :

$$\odot\,\vec{M}_A\,.$$

- Pour $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, la rotation induite est dans le sens des aiguilles d'une montre et le moment $\vec{M}_A$ est **entrant** :

$$\otimes\,\vec{M}_A\,.$$

2. Par le théorème du moment cinétique, l'accélération angulaire est proportionnelle au moment de force de $\vec{F}$ par rapport à A,

$$\dot{\vec{L}}_A = \vec{M}_A\,.$$

Selon $\hat{e}_z$, $\dot{L}_A = M_A = RF\cos\alpha\,.$
Comme la force est fixée, la norme $|M_A|$ est maximale lorsque le bras de levier est maximal. C'est le cas

$$\text{pour}\quad \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = \pi$$

(la force $\vec{F}$ est alors tangente à la roue).

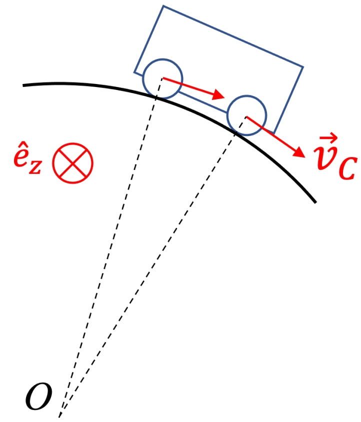
3. Comme la force est fixée, la norme $|M_A|$ est minimale pour

$$\text{pour}\quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{3\pi}{2}$$

(la force $\vec{F}$ est alors normale à la roue).

C Chariot se déplaçant sur un cylindre

1. Pour déterminer l'axe de rotation instantané, il suffit de connaitre les vecteurs vitesse de deux points du châssis. Ici, les points du châssis situés sur les axes des deux roues ont chacun un vecteur vitesse correspondant à une rotation autour du point O, comme illustrée sur la figure ci-dessous



Par conséquent, puisque le châssis est un solide indéformable, son centre de rotation instantané se situe en O. Enfin, en utilisant que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est liée à la vitesse du point G par $v_G = (R+h)\,\dot{\theta}$, on déduit que le vecteur vitesse de rotation instantanée du châssis s'exprime comme $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_z = \frac{v_G}{R+h}\vec{e}_z$, où $\vec{e}_z$ pointe dans la page, comme indiqué sur la figure.

2. Chaque roue tourne instantanément autour de son point de contact avec le sol, comme vu en cours. Le vecteur vitesse de rotation instantané pointe aussi dans la page selon $+\vec{e}_z$.
3. Le centre d'une roue C, pris comme un point du châssis, se déplace avec une vitesse de norme

$$v_C = (R+r)\,\Omega = \frac{R+r}{R+h}v_G$$

D'autre part, la vitesse du même point C, pris comme point de la roue, peut aussi s'exprimer

$$v_C = r\,\omega$$

(Nous avons utilisé le fait que $\vec{\Omega}$ et $\vec{\omega}$ pointent dans le même sens, et donc que tous les termes ci-dessus sont positifs.)

Il reste donc à égaliser ces deux expressions pour trouver

$$\omega = \frac{R+r}{r(R+h)}v_G = \frac{1+R/r}{h+R}v_G$$

Dans le cas limite où $r \ll R$ on remarque que $\omega \longrightarrow \infty$ pour toute vitesse v_G non nulle, quelque soit $h > 0$.

1 Piston et bielle

a) La position d'un point P sur la barre est donnée par

$$\vec{r}_P = h\sin\alpha\vec{e}_x + (R\cos\theta + (L-h)\cos\alpha)\vec{e}_y. \tag{1}$$

On en déduit que la vitesse du point P est donnée par

$$\vec{v}_P = h\dot{\alpha}\cos\alpha\vec{e}_x - (R\dot{\theta}\sin\theta + (L-h)\dot{\alpha}\sin\alpha)\vec{e}_y. \tag{2}$$

b) De la même manière, on obtient la vitesse du point d'attache A :

$$\vec{v}_A = -(R\dot{\theta}\sin\theta + L\dot{\alpha}\sin\alpha)\vec{e}_y.$$

Il s'en suit que la vitesse d'un point P sur la barre s'écrit comme

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + h\dot{\alpha}\cos\alpha\vec{e}_x + h\dot{\alpha}\sin\alpha\vec{e}_y.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AP} &= \dot{\alpha}\vec{e}_z\wedge(h\sin\alpha\vec{e}_x - h\cos\alpha\vec{e}_y)\\ &= h\dot{\alpha}\cos\alpha\vec{e}_x + h\dot{\alpha}\sin\alpha\vec{e}_y.\end{aligned}$$

On a donc bien que $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AP}$.

c) Les angles θ et α sont reliés par

$$R\sin\theta = L\sin\alpha \implies R\dot{\theta}\cos\theta = L\dot{\alpha}\cos\alpha.$$

En injectant cette relation dans l'expression (2) de la vitesse du point P, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= h\dot{\alpha}\cos\alpha\vec{e}_x - (L\dot{\alpha}\cos\alpha\tan\theta + (L-h)\dot{\alpha}\sin\alpha)\vec{e}_y\\ &= \dot{\alpha}\vec{e}_z\wedge\big[\underbrace{-(L\cos\alpha\tan\theta + (L-h)\sin\alpha)\vec{e}_x - h\cos\alpha\vec{e}_y}_{\overrightarrow{IP}}\big]\\ &= \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{IP}.\end{aligned}$$

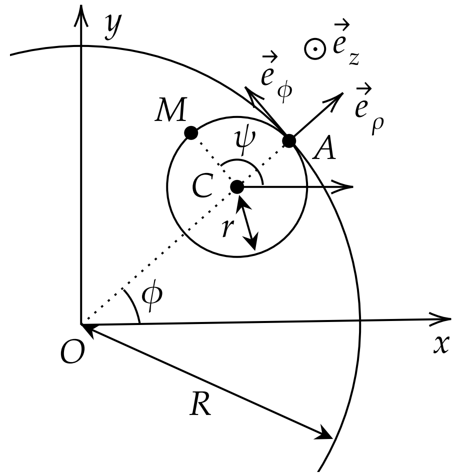
Le vecteur $\overrightarrow{IP}$ est relié aux vecteurs de position $\vec{r}_P$ et $\vec{r}_I$ des points P et I par $\overrightarrow{IP} = \vec{r}_P - \vec{r}_I$. On a donc

$$\vec{r}_I = \vec{r}_P - \overrightarrow{IP}.$$

Comme le vecteur de position $\vec{r}_P$ est donné par l'équation (1), on obtient

$$\begin{aligned}\vec{r}_I &= (L\cos\alpha\tan\theta + L\sin\alpha)\vec{e}_x + (R\cos\theta + L\cos\alpha)\vec{e}_y\\ &= L\Big[(\cos\alpha\tan\theta + \sin\alpha)\vec{e}_x + \Big(\frac{\sin\alpha}{\tan\theta} + \cos\alpha\Big)\vec{e}_y\Big].\end{aligned}$$

Le point I correspond au centre instantané de rotation.



2 Disque sur cercle

a) La vitesse du centre C du disque est donnée par

$$\vec{v}_C = \dot{\phi}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OC}.$$

b) La vitesse d'un point M sur le disque est donnée par

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \dot{\psi}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{CM}. \tag{3}$$

c) La condition de roulement sans glissement impose que la vitesse du point de contact A est nulle, i.e. $\vec{v}_A = \vec{0}$. En utilisant l'équation (3) pour le point de contact A, cette condition s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{v}_A = \vec{v}_C + \dot{\psi}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{CA} = \vec{0} \\ \implies \dot{\phi}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OC} + \dot{\psi}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{CA} = \vec{0}. \end{aligned}$$

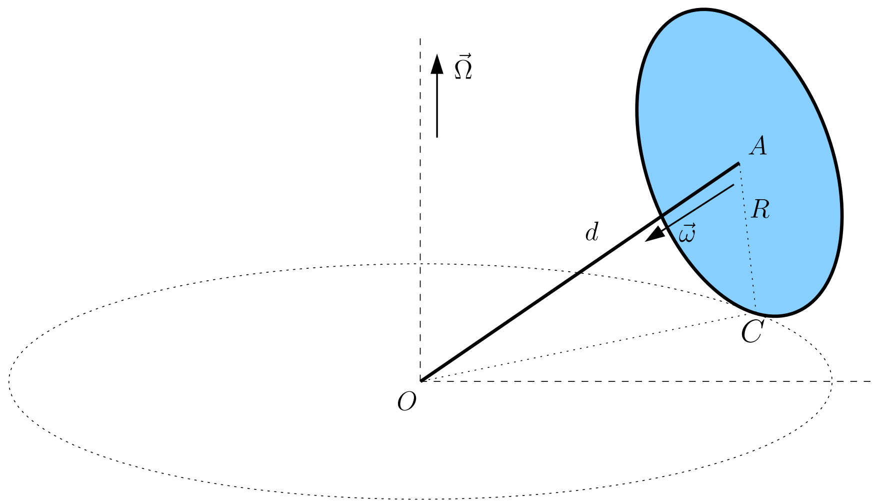
En projetant les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{CA}$ dans un repère cylindrique associé au disque, on obtient

$$\begin{aligned} (R-r)\dot{\phi}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho + r\dot{\psi}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = \vec{0} \\ \implies (R-r)\dot{\phi}\vec{e}_\phi + r\dot{\psi}\vec{e}_\phi = \vec{0}. \end{aligned}$$

Donc, la condition de roulement sans glissement s'écrit

$$(R-r)\dot{\phi} + r\dot{\psi} = 0.$$

3 Roue sur axe incliné



a) En considérant l'axe OA comme un solide de vitesse angulaire $\vec{\Omega}$, la vitesse du point A peut s'exprimer à partir de la vitesse du point O comme

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA}\,, \tag{4}$$

où l'on a utilisé le fait que le point O est fixe, et a donc une vitesse nulle.
La rotation propre de la roue se fait autour de l'axe OA avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ parallèle au vecteur $\overrightarrow{AO}$. Par contre la roue est également entraînée par le mouvement de rotation de son axe, donné par le vecteur $\vec{\Omega}$ vertical. La roue est ainsi un solide de vitesse angulaire totale $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$. Comme le roulement est sans glissement, le point C de la roue en contact avec le sol a une vitesse nulle. La vitesse du centre A de la roue peut s'exprimer à partir de la vitesse de son point C comme

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{CA} = (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{CA}\,. \tag{5}$$

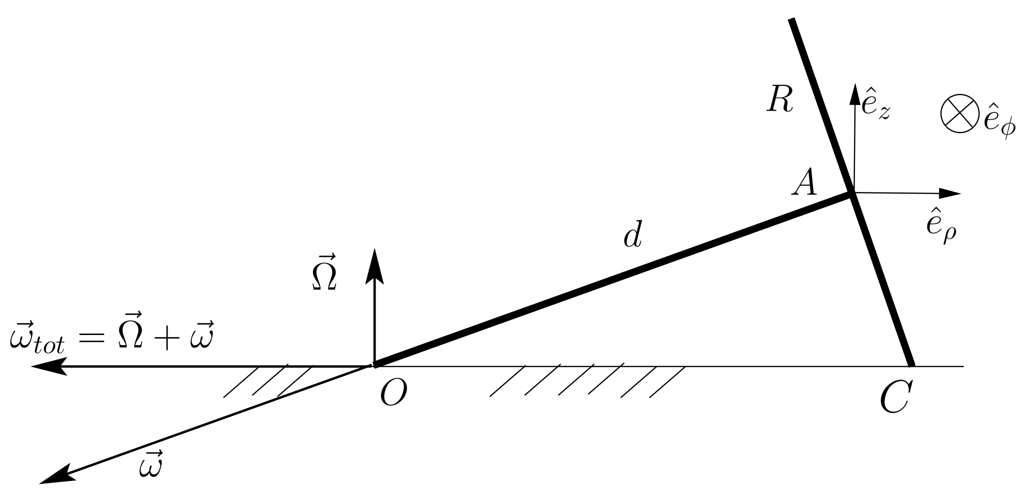
En égalisant les expressions (4) et (5) pour $\vec{v}_A$, on obtient

$$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA} = (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{CA} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CA} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CA} \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega} \wedge (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CA}) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CA}\,,$$

c'est-à-dire

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CA} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OC}\,. \tag{6}$$

Les vecteurs $\vec{\Omega}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont perpendiculaires, de même que les vecteurs $\vec{\omega}$ et $\overrightarrow{CA}$ (voir dessin).



Comme tous sont dans un même plan vertical contenant l'axe de la roue, les produits vectoriels sont dirigés selon un axe horizontal $\hat{e}_\phi$ perpendiculaire à ce plan. L'expression (6) devient ainsi

$$\omega R\hat{e}_\phi = \Omega\sqrt{d^2+R^2}\,\hat{e}_\phi\,,$$

où l'on a utilisé le fait que le vecteur $\overrightarrow{OC}$ est de longueur $\sqrt{d^2+R^2}$ et le vecteur $\overrightarrow{CA}$ de longueur R. La vitesse angulaire ω vaut donc

$$\omega = \Omega\,\frac{\sqrt{d^2+R^2}}{R} = \Omega\sqrt{1+\frac{d^2}{R^2}}\,. \tag{7}$$

L'expression (6) implique que le sens du vecteur $\vec{\omega}$ pointe de A vers O.

b) Le plan tangent commun à la roue et au sol au point C est le sol lui-même. La vitesse angulaire de roulement $\omega_\parallel$ de la roue est donc la composante parallèle au sol du vecteur $\vec{\Omega}+\vec{\omega}$. Comme le vecteur $\vec{\Omega}$ est vertical, on a

$$\omega_\parallel = \omega\cos(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}) = \omega\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}} = \Omega\frac{d}{R}\,.$$

La vitesse angulaire de pivotement $\omega_\perp$ de la roue est la composante perpendiculaire au sol du vecteur $\vec{\Omega}+\vec{\omega}$, donc

$$\omega_\perp = \Omega - \omega\sin(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}) = \Omega - \omega\frac{R}{\sqrt{d^2+R^2}} = \Omega-\Omega = 0\,.$$

Le vecteur vitesse angulaire totale de la roue,

$$\vec{\omega}_{\text{tot}} = \vec{\Omega}+\vec{\omega} = \vec{\omega}_\parallel + \vec{\omega}_\perp\,,$$

est donc horizontal.

Note 1 : On peut aussi considérer la roue et l'axe comme un seul solide de vitesse angulaire $\vec{\Omega}+\vec{\omega}$. Dans ce cas, on doit remplacer $\vec{\Omega}$ par $\vec{\Omega}+\vec{\omega}$ dans l'équation (4), ce qui ne change rien puisque $\vec{\omega}$ est anti-parallèle au vecteur $\overrightarrow{OA}$. Par contre, on peut réaliser que ce solide a deux points de vitesse nulle, O et C. L'axe instantané de rotation est donc la droite OC, ce qui signifie que $\vec{\Omega}+\vec{\omega}$ doit être horizontal.

Note 2 : Il est possible de résoudre cet exercice de façon totalement vectorielle. En effet, en multipliant l'équation (6) par le vecteur $\overrightarrow{CA}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{CA}\right) &= \overrightarrow{CA}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OC}\right)\\
\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA}\right)\vec{\omega} - \left(\overrightarrow{CA}\cdot\vec{\omega}\right)\overrightarrow{CA} &= \left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OC}\right)\vec{\Omega} - \left(\overrightarrow{CA}\cdot\vec{\Omega}\right)\overrightarrow{OC}\\
\left(R^2\right)\vec{\omega} - (0)\,\overrightarrow{CA} &= \left(-R^2\right)\vec{\Omega} - \left(\Omega R\cos(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})\right)\overrightarrow{OC}\\
R^2\vec{\omega} &= -R^2\vec{\Omega} - \Omega R d\,\hat{e}_\rho\,,
\end{aligned}$$

où $\hat{e}_\rho$ est un vecteur unitaire dans la direction de $\overrightarrow{OC}$. La vitesse angulaire de rotation propre de la roue vaut ainsi

$$\vec{\omega} = -\vec{\Omega} - \Omega\frac{d}{R}\,\hat{e}_\rho$$

et sa norme est bien donnée par l'équation (7). Le vecteur vitesse angulaire totale de la roue vaut

$$\vec{\omega}_{\text{tot}} = \vec{\omega}+\vec{\Omega} = -\Omega\frac{d}{R}\,\hat{e}_\rho\,,$$

d'où il est évident que la vitesse angulaire de pivotement de la roue (composante verticale de $\vec{\omega}_{\text{tot}}$) est nulle et que la vitesse de roulement (composante horizontale) a une norme de $\Omega d/R$.

4 Haltère entraîné par un poids

Pour résoudre ce problème, on étudie le système "haltère" constitué des deux masses m_1 et m_2 aux points P_1 et P_2, liée par des axes rigides sans masses. La force $\vec{T}'$ exercée par la masse m_3 par l'intermédiaire du câble est donc une force externe au système.

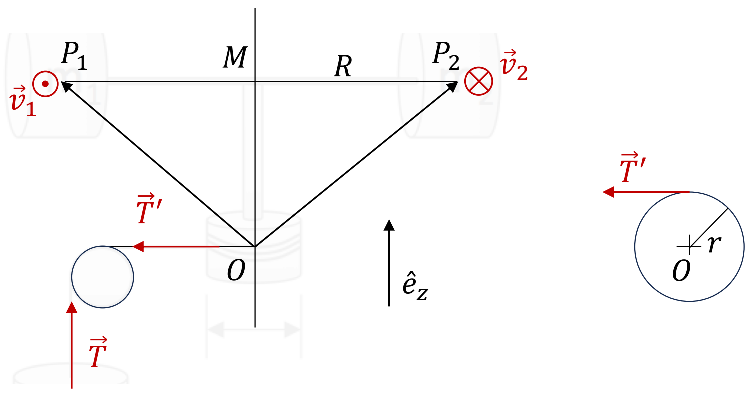
a) La masse m_3 subit la force de pesanteur $\vec{F} = m_3\vec{g}$ et la force de tension $\vec{T}$ exercée par le câble. L'équation du mouvement de la masse m_3, projetée sur un axe z vertical pointant vers le haut est :

$$m_3\ddot{z} = -m_3 g + T\,,$$

donc

$$T = m_3(\ddot{z} + g)\,, \tag{8}$$

où T est la norme du vecteur $\vec{T}$.



A son autre extrémité, le câble exerce une force horizontale $\vec{T}'$, de norme T, sur le système formé de l'haltère et de son axe de rotation vertical. Puisque le système est contraint à tourner autour de l'axe z, on ne s'intéresse pas aux moments qui sont perpendiculaires à z (ils sont compensés par les forces de liaison). Ainsi, les poids $m_1\vec{g}$ et $m_2\vec{g}$ n'ont aucun moment selon z, de même que les forces de liaison qui maintiennent l'axe de rotation verticale et empêchent l'haltère de tomber. Seuls d'éventuels frottements sur l'axe de rotation ou sur les masses auraient un moment selon z, mais on néglige les frottements.

La force $\vec{T}'$ est donc la seule force externe qui ait une projection selon z non nulle de son moment par rapport à un point O fixe situé sur l'axe de rotation. Le théorème du moment cinétique par rapport à O projeté selon z s'écrit (en choisissant $\hat{e}_z$ comme sur la figure) :

$$\frac{dL_{O,z}}{dt} = (\vec{r} \wedge \vec{T}') \cdot \hat{e}_z = rT\,. \tag{9}$$

Il reste à exprimer $L_{O,z}(t) = \vec{L}_O(t) \cdot \hat{e}_z$. Or,

$$\begin{aligned}
\vec{L}_O(t) &= \vec{OP}_1 \wedge m_1\vec{v}_1 + \vec{OP}_2 \wedge m_2\vec{v}_2 && (10)\\
&= (\vec{OM} + \vec{MP}_1) \wedge m_1\vec{v}_1 + (\vec{OM} + \vec{MP}_2) \wedge m_2\vec{v}_2 && (11)\\
&= \vec{OM} \wedge (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) + (\vec{MP}_1 \wedge m_1\vec{v}_1 + \vec{MP}_2 \wedge m_2\vec{v}_2) && (12)
\end{aligned}$$

Puisque $\vec{OM}$ est selon z il apparait directement que le premier terme ci-dessus est perpendiculaire à $\hat{e}_z$, donc ne contribue pas à $L_{O,z}$. En outre, comme les contraintes obligent $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ à être perpendiculaires à $\hat{e}_z$, le dernier terme est seulement selon z. En notant ϕ l'angle de rotation autour de z et en utilisant $v_i = R\dot{\phi}$ on obtient

$$L_{O,z}(t) = (R\, m_1\, v_1) + (R\, m_2\, v_2) = R^2(m_1 + m_2)\dot{\phi} = I_z^{(O)}\dot{\phi} \tag{13}$$

où on reconnait $I_z^{(O)} = (m_1 + m_2)R^2$ comme étant le moment d'inertie de l'haltère par rapport à l'axe Oz.
Enfin, l'accélération de la masse m_3 est liée à ϕ par $\ddot{z} = -r\ddot{\phi}$.

En projetant le théorème du moment cinétique sur l'axe z puis en éliminant T, on obtient :

$$I_z^{(O)}\ddot{\phi} = rT = m_3 rg - m_3 r^2\ddot{\phi}\,,$$

c'est à dire :

$$\ddot{\phi} = \frac{m_3 rg}{m_3 r^2 + I_z^{(O)}}\,, \tag{14}$$

et donc

$$\ddot{\phi} = \frac{m_3 rg}{m_3 r^2 + (m_1 + m_2)R^2}\,. \tag{15}$$

b) Si $m_1 = m_2 = m_3 = m$ et si $r \ll R$, on a l'approximation suivante :

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{rg}{r^2 + 2R^2} \approx \frac{rg}{2R^2} \tag{16}$$

En utilisant la vitesse angulaire initiale $\dot{\phi}(0) = 0$ on a :

$$\dot{\phi}(t) = \frac{rg}{2R^2}t \tag{17}$$

et

$$\phi(t) = \frac{rg}{4R^2}t^2 + \phi_0\,. \tag{18}$$

Si R est multiplié par 3, la vitesse angulaire $\dot{\phi}(t)$ est divisée par $3^2 = 9$.
Une chute de la masse m_3 d'une hauteur h correspond à une rotation d'un angle $\phi - \phi_0 = h/r$.
Le temps de chute t_h satisfait alors à :

$$h/r = \frac{rg}{4R^2}t_h^2 \tag{19}$$

soit :

$$t_h = \sqrt{\frac{4R^2}{r^2 g}h} = \frac{2R}{r}\sqrt{\frac{h}{g}}\,. \tag{20}$$

Si R est multiplié par 3, le temps de chute est multiplié par 3.