

Corrigé Série 12 : cinématique du solide

1 Piston et bielle

a) La position d'un point P sur la barre est donnée par

$$\vec{r}_P = h \sin \alpha \vec{e}_x + (R \cos \theta + (L - h) \cos \alpha) \vec{e}_y. \quad (1)$$

On en déduit que la vitesse du point P est donnée par

$$\vec{v}_P = h \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{e}_x - (R \dot{\theta} \sin \theta + (L - h) \dot{\alpha} \sin \alpha) \vec{e}_y. \quad (2)$$

b) De la même manière, on obtient la vitesse du point d'attache A :

$$\vec{v}_A = -(R \dot{\theta} \sin \theta + L \dot{\alpha} \sin \alpha) \vec{e}_y.$$

Il s'en suit que la vitesse d'un point P sur la barre s'écrit comme

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + h \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{e}_x + h \dot{\alpha} \sin \alpha \vec{e}_y.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} &= \dot{\alpha} \vec{e}_z \wedge (h \sin \alpha \vec{e}_x - h \cos \alpha \vec{e}_y) \\ &= h \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{e}_x + h \dot{\alpha} \sin \alpha \vec{e}_y. \end{aligned}$$

On a donc bien que $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$.

c) Les angles θ et α sont reliés par

$$R \sin \theta = L \sin \alpha \implies R \dot{\theta} \cos \theta = L \dot{\alpha} \cos \alpha.$$

En injectant cette relation dans l'expression (2) de la vitesse du point P , on obtient

$$\begin{aligned} \vec{v}_P &= h \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{e}_x - (L \dot{\alpha} \cos \alpha \tan \theta + (L - h) \dot{\alpha} \sin \alpha) \vec{e}_y \\ &= \dot{\alpha} \vec{e}_z \wedge \underbrace{[-(L \cos \alpha \tan \theta + (L - h) \sin \alpha) \vec{e}_x - h \cos \alpha \vec{e}_y]}_{\overrightarrow{IP}} \\ &= \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IP}. \end{aligned}$$

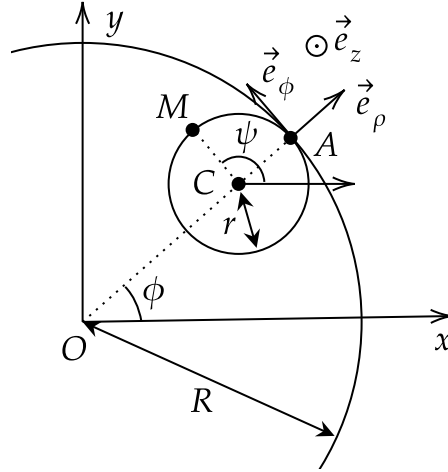
Le vecteur \overrightarrow{IP} est relié aux vecteurs de position \vec{r}_P et \vec{r}_I des points P et I par $\overrightarrow{IP} = \vec{r}_P - \vec{r}_I$. On a donc

$$\vec{r}_I = \vec{r}_P - \overrightarrow{IP}.$$

Comme le vecteur de position \vec{r}_P est donné par l'équation (1), on obtient

$$\begin{aligned} \vec{r}_I &= (L \cos \alpha \tan \theta + L \sin \alpha) \vec{e}_x + (R \cos \theta + L \cos \alpha) \vec{e}_y \\ &= L [(\cos \alpha \tan \theta + \sin \alpha) \vec{e}_x + \left(\frac{\sin \alpha}{\tan \theta} + \cos \alpha \right) \vec{e}_y]. \end{aligned}$$

Le point I correspond au centre instantané de rotation.



2 Disque sur cercle

a) La vitesse du centre C du disque est donnée par

$$\vec{v}_C = \dot{\phi} \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OC}.$$

b) La vitesse d'un point M sur le disque est donnée par

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \dot{\psi} \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{CM}. \quad (3)$$

c) La condition de roulement sans glissement impose que la vitesse du point de contact A est nulle, i.e. $\vec{v}_A = \vec{0}$. En utilisant l'équation (3) pour le point de contact A , cette condition s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_C + \dot{\psi} \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{CA} = \vec{0} \\ \implies \dot{\phi} \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OC} + \dot{\psi} \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{CA} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

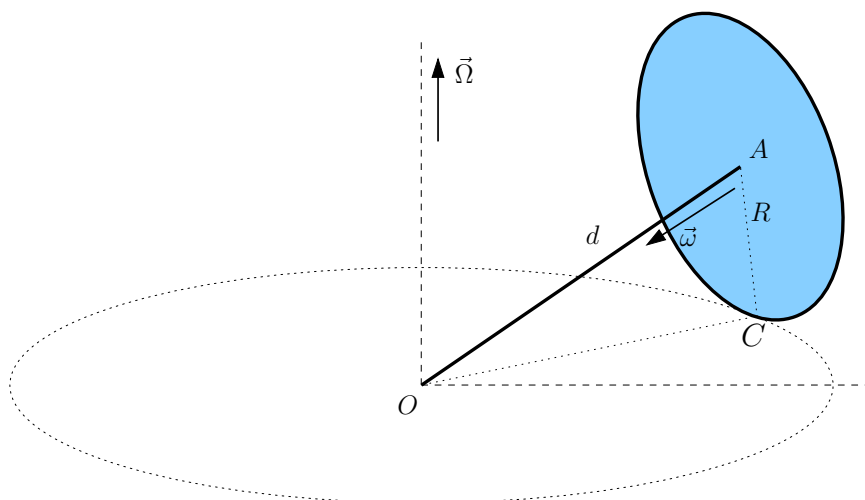
En projetant les vecteurs \overrightarrow{OC} et \overrightarrow{CA} dans un repère cylindrique associé au disque, on obtient

$$\begin{aligned} (R - r) \dot{\phi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho + r \dot{\psi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho &= \vec{0} \\ \implies (R - r) \dot{\phi} \vec{e}_\phi + r \dot{\psi} \vec{e}_\phi &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Donc, la condition de roulement sans glissement s'écrit

$$(R - r) \dot{\phi} + r \dot{\psi} = 0.$$

3 Roue sur axe incliné



- a) En considérant l'axe OA comme un solide de vitesse angulaire $\vec{\Omega}$, la vitesse du point A peut s'exprimer à partir de la vitesse du point O comme

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA}, \quad (4)$$

où l'on a utilisé le fait que le point O est fixe, et a donc une vitesse nulle.

La rotation propre de la roue se fait autour de l'axe OA avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ parallèle au vecteur \overrightarrow{AO} . Par contre la roue est également entraînée par le mouvement de rotation de son axe, donné par le vecteur $\vec{\Omega}$ vertical. La roue est ainsi un solide de vitesse angulaire totale $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$. Comme le roulement est sans glissement, le point C de la roue en contact avec le sol a une vitesse nulle. La vitesse du centre A de la roue peut s'exprimer à partir de la vitesse de son point C comme

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{CA} = (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{CA}. \quad (5)$$

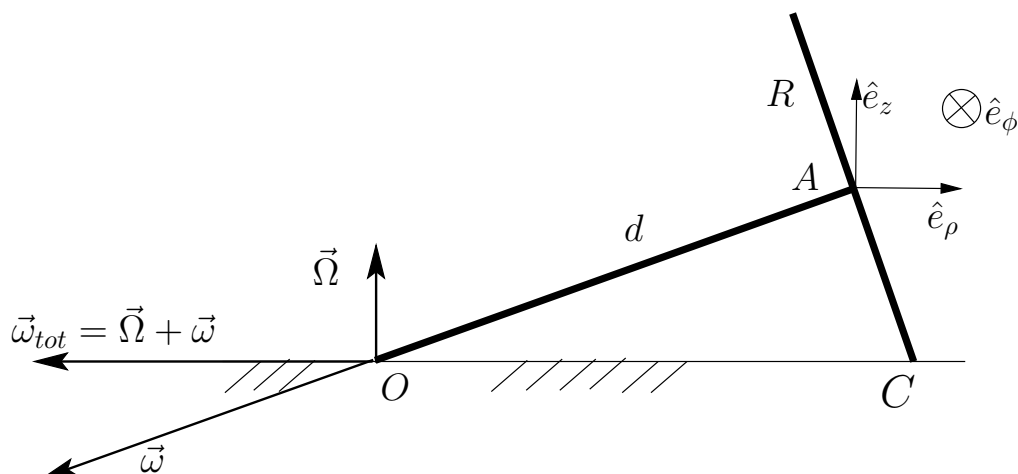
En égalisant les expressions (4) et (5) pour \vec{v}_A , on obtient

$$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA} = (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{CA} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CA} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CA} \Rightarrow \vec{\Omega} \wedge (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CA}) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CA},$$

c'est-à-dire

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CA} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OC}. \quad (6)$$

Les vecteurs $\vec{\Omega}$ et \overrightarrow{OC} sont perpendiculaires, de même que les vecteurs $\vec{\omega}$ et \overrightarrow{CA} (voir dessin).



Comme tous sont dans un même plan vertical contenant l'axe de la roue, les produits vectoriels sont dirigés selon un axe horizontal \hat{e}_ϕ perpendiculaire à ce plan. L'expression (6) devient ainsi

$$\omega R \hat{e}_\phi = \Omega \sqrt{d^2 + R^2} \hat{e}_\phi,$$

où l'on a utilisé le fait que le vecteur \overrightarrow{OC} est de longueur $\sqrt{d^2 + R^2}$ et le vecteur \overrightarrow{CA} de longueur R . La vitesse angulaire ω vaut donc

$$\omega = \Omega \frac{\sqrt{d^2 + R^2}}{R} = \Omega \sqrt{1 + \frac{d^2}{R^2}}. \quad (7)$$

L'expression (6) implique que le sens du vecteur $\vec{\omega}$ pointe de A vers O .

- b) Le plan tangent commun à la roue et au sol au point C est le sol lui-même. La vitesse angulaire de roulement ω_{\parallel} de la roue est donc la composante parallèle au sol du vecteur $\vec{\Omega} + \vec{\omega}$. Comme le vecteur $\vec{\Omega}$ est vertical, on a

$$\omega_{\parallel} = \omega \cos(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = \omega \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}} = \Omega \frac{d}{R}.$$

La vitesse angulaire de pivotement ω_{\perp} de la roue est la composante perpendiculaire au sol du vecteur $\vec{\Omega} + \vec{\omega}$, donc

$$\omega_{\perp} = \Omega - \omega \sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = \Omega - \omega \frac{R}{\sqrt{d^2 + R^2}} = \Omega - \Omega = 0.$$

Le vecteur vitesse angulaire totale de la roue,

$$\vec{\omega}_{\text{tot}} = \vec{\Omega} + \vec{\omega} = \vec{\omega}_{\parallel} + \vec{\omega}_{\perp},$$

est donc horizontal.

Note 1 : On peut aussi considérer la roue et l'axe comme un seul solide de vitesse angulaire $\vec{\Omega} + \vec{\omega}$. Dans ce cas, on doit remplacer $\vec{\Omega}$ par $\vec{\Omega} + \vec{\omega}$ dans l'équation (4), ce qui ne change rien puisque $\vec{\omega}$ est anti-parallèle au vecteur \overrightarrow{OA} . Par contre, on peut réaliser que ce solide a deux points de vitesse nulle, O et C . L'axe instantané de rotation est donc la droite OC , ce qui signifie que $\vec{\Omega} + \vec{\omega}$ doit être horizontal.

Note 2 : Il est possible de résoudre cet exercice de façon totalement vectorielle. En effet, en multipliant l'équation (6) par le vecteur \overrightarrow{CA} , on obtient

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CA}) &= \overrightarrow{CA} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OC}) \\ (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA}) \vec{\omega} - (\overrightarrow{CA} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{CA} &= (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC}) \vec{\Omega} - (\overrightarrow{CA} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{OC} \\ (R^2) \vec{\omega} - (0) \overrightarrow{CA} &= (-R^2) \vec{\Omega} - (\Omega R \cos(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})) \overrightarrow{OC} \\ R^2 \vec{\omega} &= -R^2 \vec{\Omega} - \Omega R d \hat{e}_\rho, \end{aligned}$$

où \hat{e}_ρ est un vecteur unitaire dans la direction de \overrightarrow{OC} . La vitesse angulaire de rotation propre de la roue vaut ainsi

$$\vec{\omega} = -\vec{\Omega} - \Omega \frac{d}{R} \hat{e}_\rho$$

et sa norme est bien donnée par l'équation (7). Le vecteur vitesse angulaire totale de la roue vaut

$$\vec{\omega}_{\text{tot}} = \vec{\omega} + \vec{\Omega} = -\Omega \frac{d}{R} \hat{e}_\rho,$$

d'où il est évident que la vitesse angulaire de pivotement de la roue (composante verticale de $\vec{\omega}_{\text{tot}}$) est nulle et que la vitesse de roulement (composante horizontale) a une norme de $\Omega d/R$.

4 Haltère entraîné par un poids

Pour résoudre ce problème, on étudie le système "haltère" constitué des deux masses m_1 et m_2 aux points P_1 et P_2 , liée par des axes rigides sans masses. La force \vec{T}' exercée par la masse m_3 par l'intermédiaire du câble est donc une force externe au système.

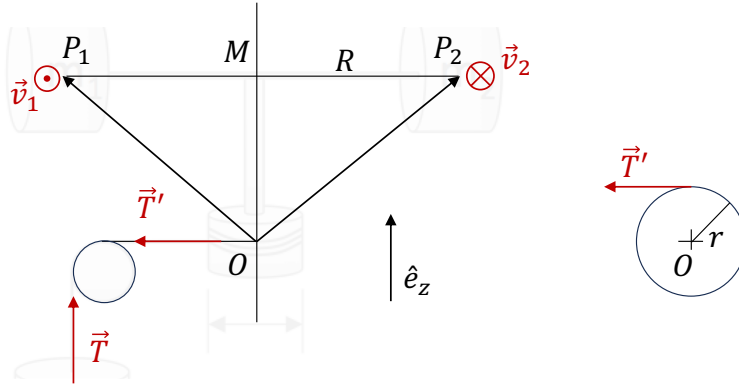
- a) La masse m_3 subit la force de pesanteur $\vec{F} = m_3\vec{g}$ et la force de tension \vec{T} exercée par le câble. L'équation du mouvement de la masse m_3 , projetée sur un axe z vertical (pointant vers le bas) est :

$$m_3\ddot{z} = m_3g - T,$$

donc

$$T = m_3(g - \ddot{z}), \quad (8)$$

où T est la norme du vecteur \vec{T} .



A son autre extrémité, le câble exerce une force horizontale \vec{T}' , de norme T , sur le système formé de l'haltère et de son axe de rotation vertical. Puisque le système est contraint à tourner autour de l'axe z , on ne s'intéresse pas aux moments qui sont perpendiculaires à z (ils sont compensés par les forces de liaison). Ainsi, les poids $m_1\vec{g}$ et $m_2\vec{g}$ n'ont aucun moment selon z , de même que les forces de liaison qui maintiennent l'axe de rotation verticale et empêchent l'haltère de tomber. Seuls d'éventuels frottements sur l'axe de rotation ou sur les masses auraient un moment selon z , mais on néglige les frottements.

La force \vec{T}' est donc la seule force externe qui ait une projection selon z non nulle de son moment par rapport à un point O fixe situé sur l'axe de rotation. Le théorème du moment cinétique par rapport à O projeté selon z s'écrit (en choisissant \hat{e}_z comme sur la figure) :

$$\frac{dL_{O,z}}{dt} = (\vec{r} \wedge \vec{T}') \cdot \hat{e}_z = rT. \quad (9)$$

Il reste à exprimer $L_{O,z}(t) = \vec{L}_O(t) \cdot \hat{e}_z$. Or,

$$\vec{L}_O(t) = O\vec{P}_1 \wedge m_1\vec{v}_1 + O\vec{P}_2 \wedge m_2\vec{v}_2 \quad (10)$$

$$= (O\vec{M} + M\vec{P}_1) \wedge m_1\vec{v}_1 + (O\vec{M} + M\vec{P}_2) \wedge m_2\vec{v}_2 \quad (11)$$

$$= O\vec{M} \wedge (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) + (M\vec{P}_1 \wedge m_1\vec{v}_1 + M\vec{P}_2 \wedge m_2\vec{v}_2) \quad (12)$$

Puisque $O\vec{M}$ est selon z il apparait directement que le premier terme ci-dessus est perpendiculaire à \hat{e}_z , donc ne contribue pas à $L_{O,z}$. En outre, comme les contraintes obligent \vec{v}_1 et \vec{v}_2 à être perpendiculaires à \hat{e}_z , le dernier terme est seulement selon z . En notant ϕ l'angle de rotation autour de z et en utilisant $v_i = R\dot{\phi}$ on obtient

$$L_{O,z}(t) = (R m_1 v_1) + (R m_2 v_2) = R^2(m_1 + m_2)\dot{\phi} = I_z^{(O)}\dot{\phi} \quad (13)$$

où on reconnaît $I_z^{(O)} = (m_1 + m_2)R^2$ comme étant le moment d'inertie de l'haltère par rapport à l'axe Oz .

Enfin, l'accélération de la masse m_3 est liée à ϕ par $\ddot{z} = r\ddot{\phi}$.

En projetant le théorème du moment cinétique sur l'axe z puis en éliminant T , on obtient :

$$I_z^{(O)}\ddot{\phi} = rT = m_3 r g - m_3 r^2 \ddot{\phi},$$

c'est à dire :

$$\ddot{\phi} = \frac{m_3 r g}{m_3 r^2 + I_z^{(O)}}, \quad (14)$$

et donc

$$\ddot{\phi} = \frac{m_3 r g}{m_3 r^2 + (m_1 + m_2)R^2}. \quad (15)$$

b) Si $m_1 = m_2 = m_3 = m$ et si $r \ll R$, on a l'approximation suivante :

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{r g}{r^2 + 2R^2} \approx \frac{r g}{2R^2} \quad (16)$$

En utilisant la vitesse angulaire initiale $\dot{\phi}(0) = 0$ on a :

$$\dot{\phi}(t) = \frac{r g}{2R^2} t \quad (17)$$

et

$$\phi(t) = \frac{r g}{4R^2} t^2 + \phi_0. \quad (18)$$

Si R est multiplié par 3, la vitesse angulaire $\dot{\phi}(t)$ est divisée par $3^2 = 9$.

Une chute de la masse m_3 d'une hauteur h correspond à une rotation d'un angle $\phi - \phi_0 = h/r$.

Le temps de chute t_h satisfait alors à :

$$h/r = \frac{r g}{4R^2} t_h^2 \quad (19)$$

soit :

$$t_h = \sqrt{\frac{4R^2}{r^2 g} h} = \frac{2R}{r} \sqrt{\frac{h}{g}}. \quad (20)$$

Si R est multiplié par 3, le temps de chute est multiplié par 3.

5 Feu d'artifice balistique sur la lune

- a) On définit un repère orthonormé droit $Oxyz$ avec l'origine O sur le canon, l'axe z vertical vers le haut et l'axe x tel que \vec{v}_0 soit dans le plan xz . Le projectile est en mouvement uniformément accéléré d'accélération $\vec{g} = -g\hat{e}_z$. Compte tenu des conditions initiales, sa vitesse verticale et sa position verticale valent

$$\dot{z}(t) = v_0 \sin \alpha - gt \quad \text{et} \quad z(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (21)$$

L'altitude maximale est atteinte lorsque $\dot{z} = 0$, c'est-à-dire au temps

$$t_{\text{expl}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (22)$$

et vaut

$$z_{\text{expl}} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}. \quad (23)$$

Au moment de l'explosion, le projectile a une vitesse horizontale (puisqu'il est au sommet de sa trajectoire). Comme tous les fragments ont des vitesses horizontales par rapport au projectile, leurs vitesses absolues sont également horizontales au temps t_{expl} . Ils gardent donc une altitude commune, qui évolue selon

$$z(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{ou} \quad z(t) = z_{\text{expl}} - \frac{1}{2}g(t - t_{\text{expl}})^2, \quad (24)$$

et ils atteignent tous $z = 0$ au même instant

$$t_{\text{sol}} = t_{\text{expl}} + \sqrt{\frac{2z_{\text{expl}}}{g}} = 2t_{\text{expl}} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (25)$$

Solution alternative : On arrive au même résultat par le raisonnement suivant. Les fragments ont tous des vitesses verticales nulles au moment de l'explosion. Il tombent donc sur le sol au même instant que ne l'aurait fait le projectile s'il n'avait pas explosé, soit $t_{\text{sol}} = 2t_{\text{expl}}$.

- b) Dans ce problème, le système est le projectile, qui se transforme en 1000 fragments par l'action de forces internes à l'instant de son explosion. La seule force externe au système est la pesanteur, dont la résultante sur les 1000 fragments est

$$\vec{P} = \sum_i^{1000} m_i \vec{g} = M\vec{g} = -Mg\hat{e}_z. \quad (26)$$

Par le théorème du centre de masse,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -Mg\hat{e}_z, \quad (27)$$

le centre de masse du système suit donc un mouvement balistique identique à celui du projectile s'il n'avait pas explosé. Le poids étant vertical, le système est donc isolé dans le plan horizontal et la composante horizontale de la quantité de mouvement du système est conservée. On en déduit que le centre de masse G du système, qui est également le centre du cercle décrit par les fragments, a un mouvement rectiligne uniforme dans le plan horizontal. Le centre du cercle décrit par les fragments au temps t_{sol} se trouve à la position du centre de masse du système au temps t_{sol} , c'est-à-dire à l'emplacement où le projectile serait tombé s'il n'avait pas explosé en vol, soit

$$x(t_{\text{sol}}) = v_0 \cos \alpha t_{\text{sol}} = 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}. \quad (28)$$

Dans le référentiel du centre de masse du projectile l'énergie cinétique totale des fragments juste après l'explosion vaut W et les vitesses des fragments au moment de l'explosion sont horizontales de norme commune u . On a donc

$$W = \sum_{i=1}^{1000} \frac{1}{2} m_i u^2 = \frac{1}{2} M u^2 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{2W}{M}} \quad (29)$$

En projection dans le plan horizontal, les fragments se déplacent tous à vitesse constante u par rapport au centre de masse. Ils sont donc en tout temps $t \geq t_{\text{expl}}$ disposés sur un cercle horizontal centré en G dont le rayon croît et vaut $u(t - t_{\text{expl}})$. Le rayon du cercle au temps t_{sol} où les fragments arrivent au sol vaut ainsi

$$R = u(t_{\text{sol}} - t_{\text{expl}}) = u t_{\text{expl}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \sqrt{\frac{2W}{M}} \quad (30)$$

c) Si le canon reçoit un fragment, c'est qu'il est sur le cercle, donc $x(t_{\text{sol}}) = R$, c'est-à-dire

$$W = 2Mv_0^2 \cos^2 \alpha. \quad (31)$$

L'énergie cinétique initiale du projectile valant $E_{\text{cin},0} = \frac{1}{2} M v_0^2$, le rapport cherché vaut

$$\frac{W}{E_{\text{cin},0}} = 4 \cos^2 \alpha. \quad (32)$$