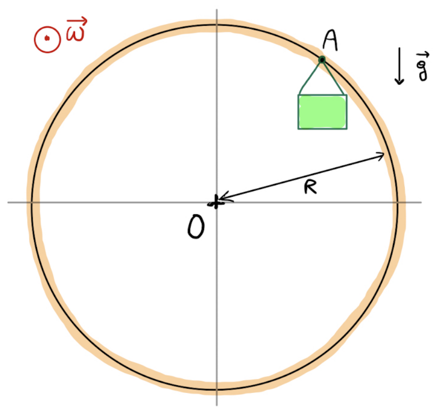
Série 12 : cinématique du solide

Exercices d'introduction

A La grande roue

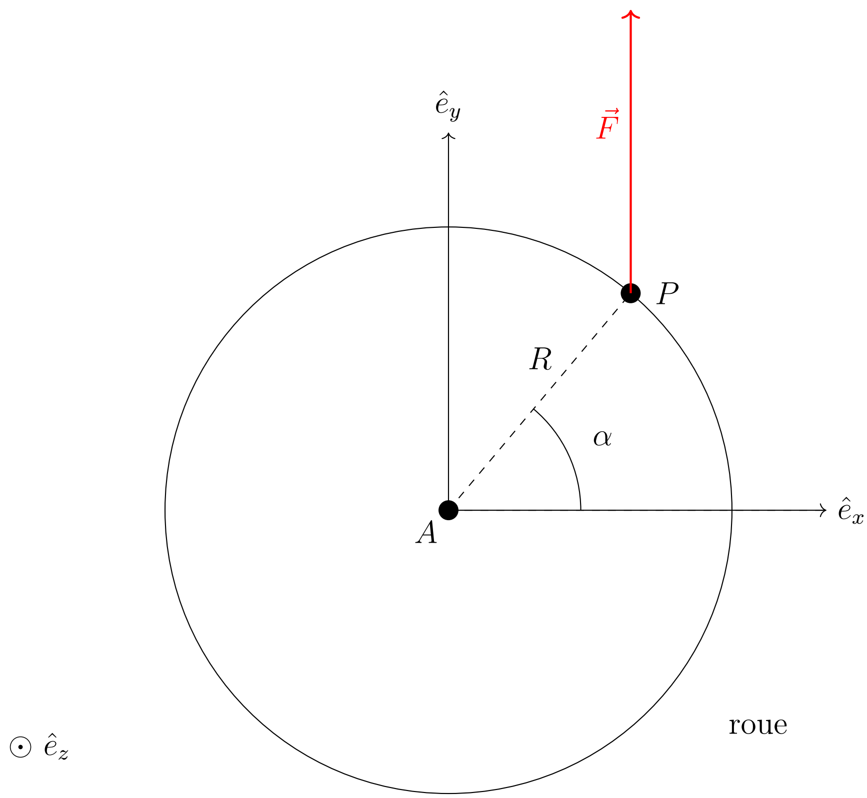
On considère une grande roue en rotation lente, à vitesse angulaire constante $\vec{\omega}$ pointant hors de la page, autour de son axe horizontal passant par O, avec des nacelles suspendues librement le long de sa circonférence. Les nacelles restent dans leur position d'équilibre à chaque instant, et on néglige les effets de la force centrifuge.



1. Dessinez le champ des vitesses de la grande roue (vitesses de quelques points de la roue). De quel type de mouvement s'agit-il ? Où se trouve le centre instantané de rotation ?
2. Dessinez les vitesses de plusieurs points d'une nacelle. Refaite le dessin pour une autre position de la nacelle. De quel type de mouvement s'agit-il ? Où se trouve le centre instantané de rotation ?
3. Déterminer le vecteur vitesse instantanée de rotation de la nacelle par rapport à la grande roue $\vec{\omega}_{\text{nacelle/roue}}$.

B Moment de force : Bras de levier

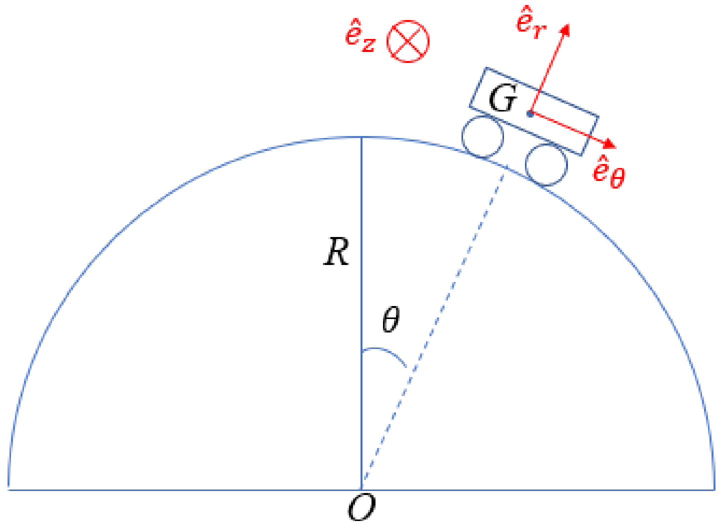
On considère une roue d'axe A et de rayon R et on applique une force $\vec{F}$ donnée en un point P de la circonférence. Le point P est repéré à l'aide d'un angle α.



1. Exprimer le moment de force par rapport à A (projeté sur $\hat{e}_z$) en fonction de α. Préciser le sens de la rotation induite, en fonction de α.
2. Pour quelle valeur de α l'accélération angulaire $\ddot{\alpha}$ de la roue autour de A est-elle maximale ?
3. Pour quelle valeur de α l'accélération angulaire $\ddot{\alpha}$ de la roue autour de A est-elle minimale ?

C Chariot se déplaçant sur un cylindre

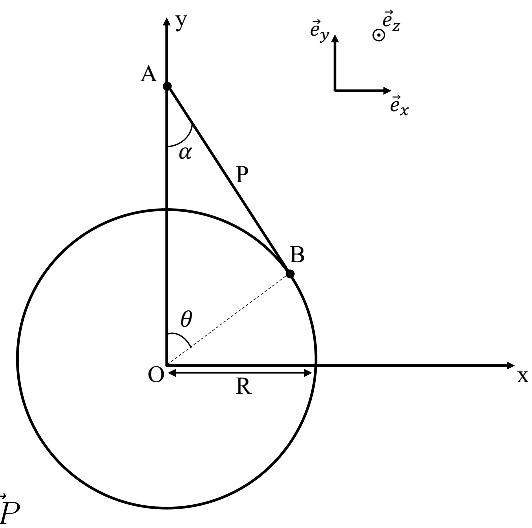
On considère un chariot se déplaçant le long de la circonférence d'un cylindre de rayon R et d'axe passant par O. Le centre de masse G du chariot se trouve à une distance h de la surface du cylindre et se déplace avec une vitesse de norme v_G constante. On fait l'hypothèse que les roues, de rayon r, roulent sans glisser sur la surface du cylindre.



1. Quel est le centre de rotation instantané du châssis rectangulaire du chariot, considéré comme un solide indéformable ? Et son vecteur vitesse de rotation instantanée $\vec{\Omega}$?
2. Quel est le centre de rotation instantané d'une des roues du chariot ?
3. Quelle est la vitesse angulaire ω de rotation des roues du chariot, dans un référentiel lié au cylindre ?

1 Piston et bielle [** 20 min]

Une barre de longueur L est attachée par une de ses extrémités à une roue de rayon R tournant avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}$. L'autre extrémité de la barre peut glisser sur un axe passant par le centre O de la roue.



a) Déterminer la vitesse $\vec{v}_P$ d'un point P quelconque sur la barre en fonction des angles α, θ et de la distance h entre le point P et le point d'attache A.

b) En déduire que la vitesse $\vec{v}_P$ est reliée à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \dot{\alpha}\vec{e}_z$ par

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}$$

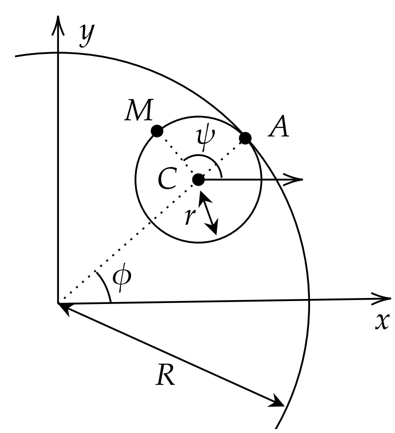
c) Déterminer une relation entre R, L, θ et α. En déduire que la vitesse $\vec{v}_P$ peut s'écrire comme

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{IP}$$

et trouver les coordonnées cartésiennes du point I. A quoi correspond ce point ?

2 Disque sur cercle [* 15 min]

Un disque de rayon r roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon R.



a) Déterminer la vitesse du centre C du disque en fonction de son angle de rotation ϕ.

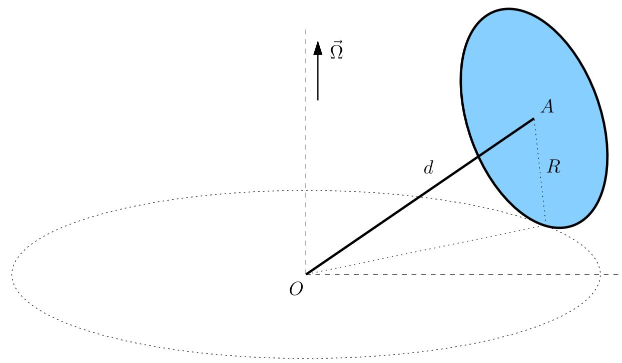
b) Déterminer la vitesse d'un point M quelconque du disque en fonction de la vitesse en son centre C et de l'angle ψ de sa rotation propre.

c) En déduire que la condition de roulement sans glissement peut s'écrire

$$(R-r)\dot{\phi} + r\dot{\psi} = 0$$

3 Roue sur axe incliné [** 25 min]

Une roue de rayon R est attachée en son centre A à une extrémité d'un axe rigide de longueur d, perpendiculaire au plan de la roue. L'autre extrémité de l'axe est fixée en un point O du sol, supposé horizontal (voir dessin). La roue roule sans glissement sur le sol, entraînée par l'axe, qui à un mouvement de rotation caractérisé par un vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}(t)$ dirigé verticalement vers le haut.

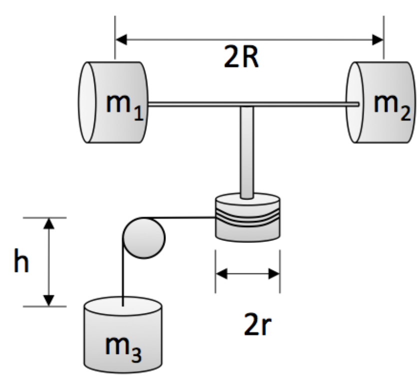


a) En utilisant la formule qui lie les vitesses vectorielles des points d'un solide indéformable, déterminer la vitesse angulaire $\vec{\omega}(t)$ de rotation propre de la roue autour de son axe.

b) Calculer la vitesse angulaire de roulement et la vitesse angulaire de pivotement de la roue, c'est-à-dire les composantes horizontale et verticale de sa vitesse angulaire totale.

4 Haltère entrainé par un poids [*** 30 min]

Un haltère formé de deux masses m_1 et m_2 est fixé horizontalement en son centre sur un axe de rotation vertical sans masse. Cet axe est entraîné par un câble enroulé autour d'un rayon r, auquel est suspendu une masse m_3 par l'intermédiaire d'une poulie fixe sans masse. Le système est initialement au repos. On laisse ensuite chuter la masse m_3 d'une hauteur h. On néglige tous les frottements et l'axe vertical ne peut pas se déplacer.



a) Déterminer l'accélération angulaire de l'haltère.

b) Dans l'hypothèse où $m_1 = m_2 = m_3 = m$ et où r peut être négligé par rapport à R ($r \ll R$), déterminer comment la vitesse angulaire et comment le temps de chute sont affectés lorsque R est triplé.

Elements de réponse :

Exercice 1 : La position du point I est donnée par :

$$\begin{aligned}\vec{r}_I &= (L\cos\alpha\tan\theta + L\sin\alpha)\vec{e}_x + (R\cos\theta + L\cos\alpha)\vec{e}_y \\ &= L\big[(\cos\alpha\tan\theta + \sin\alpha)\vec{e}_x + \Big(\frac{\sin\alpha}{\tan\theta} + \cos\alpha\Big)\vec{e}_y\big].\end{aligned}$$

Exercice 2 : La vitesse d'un point M sur le disque est donnée par

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \dot{\psi}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{CM}. \tag{1}$$

Exercice 3 : La vitesse angulaire de roulement $\omega_\parallel$ de la roue est

$$\omega_\parallel = \omega\cos(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = \omega\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}} = \Omega\frac{d}{R}\,.$$

La vitesse angulaire de pivotement $\omega_\perp$ de la roue est la composante perpendiculaire au sol du vecteur $\vec{\Omega} + \vec{\omega}$, donc

$$\omega_\perp = \Omega - \omega\sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = \Omega - \omega\frac{R}{\sqrt{d^2+R^2}} = \Omega - \Omega = 0\,.$$

Exercice 4 : L'accélération angulaire de l'haltère est donnée par :

$$\ddot{\theta} = \frac{m_3 r g}{m_3 r^2 + (m_1+m_2)R^2}\,. \tag{2}$$