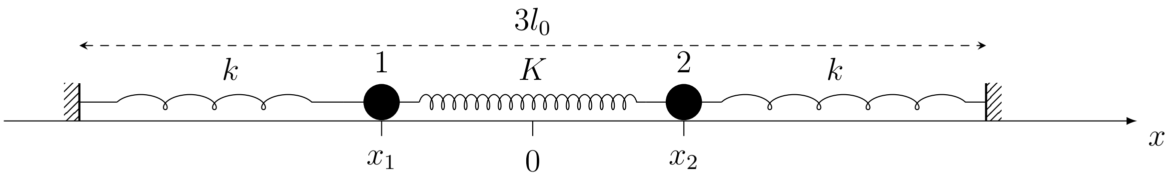
Corrigé Série 11 : Systèmes de points matériels, collisions

1 Oscillateurs couplés

On choisit un repère tel que l'axe x est parallèle au rail, et on place l'origine à mi-distance entre les points fixes des ressorts de constante de rappel k (tout autre choix fonctionne aussi).



Sans le ressort de raideur K, les 2 masses se comportent comme 2 oscillateurs harmoniques indépendants de pulsation $\sqrt{\frac{k}{m}}$. C'est le ressort de raideur K qui introduit le couplage entre les deux masses.

a) En faisant le bilan des forces sur chaque point matériel et en exprimant correctement les forces de chaque ressort (voir séries précédentes) les équations du mouvement pour les points matériels, numérotés 1 et 2, sont

$$m\ddot{x}_1 = -k\left(x_1 - \left(-\frac{l_0}{2}\right)\right) - K\left(x_1 - (x_2 - l_0)\right)$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x}_1 = -k\left(x_1 + \frac{l_0}{2}\right) + K(x_2 - x_1 - l_0)\,, \tag{1}$$

et

$$m\ddot{x}_2 = -k\left(x_2 - \frac{l_0}{2}\right) - K\left(x_2 - (x_1 + l_0)\right)$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x}_2 = -k\left(x_2 - \frac{l_0}{2}\right) - K(x_2 - x_1 - l_0)\,. \tag{2}$$

b) Le centre de masse du système est défini par

$$X_{\mathrm{G}} = \frac{mx_1 + mx_2}{m+m} = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow \ddot{X}_{\mathrm{G}} = \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2}\,,$$

et la coordonnée relative entre les points matériels est

$$u = x_2 - x_1 \Rightarrow \ddot{u} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1\,.$$

En calculant la somme des équations (1) et (2), on obtient

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2) \Rightarrow m\ddot{X}_{\mathrm{G}} = -kX_{\mathrm{G}} \Rightarrow \ddot{X}_{\mathrm{G}} + \frac{k}{m}X_{\mathrm{G}} = 0\,, \tag{3}$$

qui est l'équation du mouvement du centre de masse.

En calculant la différence entre les équations (2) et (1), on obtient

$$m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -k(x_2 - x_1 - l_0) - 2K(x_2 - x_1 - l_0)\,,$$

d'où l'on trouve

$$m\ddot{u} = -(k+2K)(u - l_0) \Rightarrow \ddot{u} + \frac{k+2K}{m}(u - l_0) = 0\,, \tag{4}$$

qui est l'équation du mouvement relatif.

c) On remarque que les deux équations du mouvement (3) et (4) sont des équations d'oscillateurs harmoniques de pulsations $\omega_{\mathrm{G}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pour le centre de masse, et $\omega_u = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$ pour le mouvement relatif.

La solution générale pour l'équation du mouvement du centre de masse est donc

$$X_{\mathrm{G}}(t) = A_{\mathrm{G}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_{\mathrm{G}}\right)\,,$$

et pour le mouvement relatif

$$u(t) = A_u \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t + \phi_u\right) + l_0\,.$$

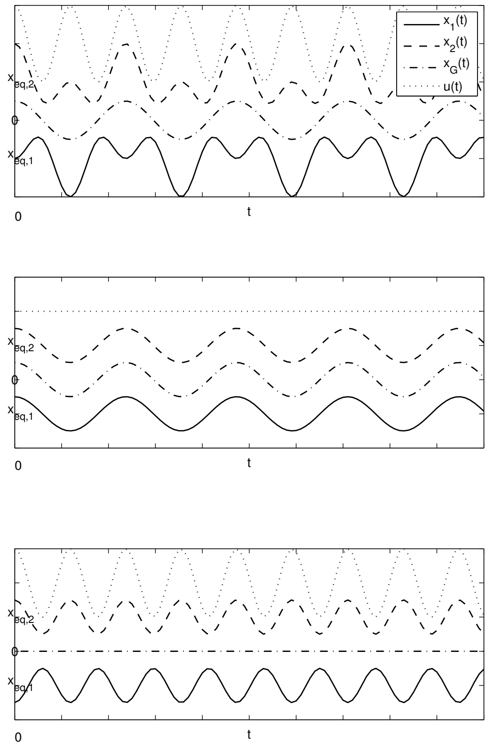
Le mouvement des points matériels, $x_1(t)$ et $x_2(t)$, est alors donné par

$$x_1(t) = X_{\mathrm{G}} - \frac{u}{2} = A_{\mathrm{G}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_{\mathrm{G}}\right) - \frac{1}{2}A_u \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t + \phi_u\right) - \frac{l_0}{2}\,,$$

et

$$x_2(t) = X_{\mathrm{G}} + \frac{u}{2} = A_{\mathrm{G}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_{\mathrm{G}}\right) + \frac{1}{2}A_u \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t + \phi_u\right) + \frac{l_0}{2}\,.$$

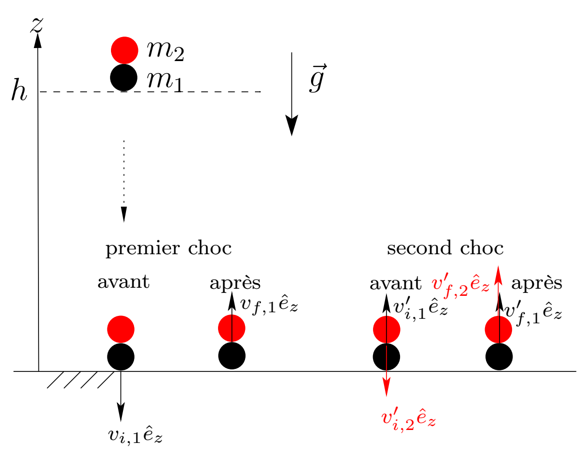
d) Si la coordonnée relative reste constante, cela veut dire que la distance entre les 2 masses ne change pas au cours du temps. Cette situation correspond à une condition initiale telle que $A_u = 0$, et donc $u(t) = l_0$. Dans ce cas-là, les masses oscillent *en phase* avec une pulsation $\omega_G = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Cette situation est observée si les 2 masses sont écartées de leur position d'équilibre de la même distance et *dans la même direction* avant d'être lâchées.
Le cas particulier où le centre de masse est immobile correspond à une condition initiale telle que $A_G = 0$, et on a alors $X_G(t) = 0$. Dans ce cas-là, les deux masses oscillent en *opposition de phase* à la pulsation $\omega_u = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$. Ce mouvement est observé si les deux masses sont écartées de leur position d'équilibre d'une même distance et *dans des directions opposées* avant d'être lâchées.
La figure ci-contre illustre l'évolution des différentes positions pour un cas général et les 2 cas particuliers.



Démonstration interactive d'oscillateurs couplés :

`https://austinpeel.github.io/coupled-oscillations/`

2 Rebond de deux balles



Attention : Dans cet exercice, la quantité v est la norme du vecteur $\vec{v}$ alors que les quantités telles v_i, v_f sont des composantes selon l'axe z, dirigé vers le haut selon la figure.
Nous considérons d'abord le cas où les deux chocs sont élastiques, puis nous traiterons le cas où le choc entre les deux balles est mou.

1.a) Comme indiqué dans la donnée, on décompose le problème en deux chocs élastiques. Le premier entre la balle m_1 et le sol suivi immédiatement après du deuxième entre les deux balles :

— avant le premier choc, la balle m_1 a une vitesse $v_i = -v$ (on a choisi l'axe $\hat{e}_z$ dirigé vers le haut). Le choc est parfaitement élastique (et la masse de la balle négligeable par rapport à celle de la terre), donc $v_f = -v_i = v$ (v_i et v_f sont les vitesses initiale et finale de la balle en projection sur l'axe $\hat{e}_z$). La vitesse v est donnée par la hauteur h et l'accélération gravifique. Par conservation de l'énergie mécanique dans la chute, on a $\frac{1}{2}m_i v^2 = m_i gh$ $(i = 1, 2)$, et donc

$$v = \sqrt{2gh}$$

— avant le deuxième choc, la balle m_1 a une vitesse $v'_{i,1} = v$ et la balle m_2 une vitesse $v'_{i,2} = -v$. La conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire

$$m_1 v - m_2 v = m_1 v'_{f,1} + m_2 v'_{f,2} \tag{5}$$

et la conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}m_1 v'^2_{f,1} + \frac{1}{2}m_2 v'^2_{f,2} \tag{6}$$

De l'équation (5), on tire

$$v'_{f,1} = \frac{(m_1 - m_2)v - m_2 v'_{f,2}}{m_1} \tag{7}$$

qu'on injecte dans (6) pour trouver

$$(m_2^2 + m_1 m_2)v'^2_{f,2} + 2(m_2^2 - m_1 m_2)vv'_{f,2} + (m_2^2 - 3m_1 m_2)v^2 = 0$$

Il s'agit d'une équation du deuxième degré dont les solutions sont

$$v'_{f,2} = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v \quad \text{et} \quad v'_{f,2} = -v$$

C'est la première solution qui nous intéresse (la deuxième correspond au cas où il n'y a pas eu de choc).
En injectant ce résultat dans (7), on trouve

$$v'_{f,1} = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2}v$$

1.b) Pour que les deux balles repartent vers le haut, il faut que $v'_{f,1} > 0$ et $v'_{f,2} > 0$. Ce qui donne respectivement les conditions

$$m_1 > 3m_2 \quad \text{et} \quad 3m_1 > m_2$$

Si la première condition est respectée, la deuxième l'est automatiquement. Si on veut que les balles repartent les deux vers le haut, il faut donc que $m_1 > 3m_2$. Dans le cas limite où $m_1 = 3m_2$, on a $v'_{f,1} = 0$, la balle m_1 reste immobile sur le sol.

1.c) Dans la limite où $m_1 \gg m_2$, on a

$$v'_{f,2} = 3v \quad \text{et} \quad v'_{f,1} = v \tag{8}$$

La hauteur à laquelle remontent les balles est donnée par l'équation du mouvement

$$\ddot{z} = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = -gt + v_0 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0$$

avec les conditions initiales $z_0 = 0$ et v_0 est le résultat obtenu en (8)
La hauteur maximale est atteinte pour $\dot{z}(t_{\max}) = 0$, c'est-à-dire $t_{\max} = \frac{v_0}{g}$ et donc

$$z_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Pour la balle m_1, on a $v_0 = v$, donc

$$z_{1,\,\max} = \frac{v^2}{2g} = h.$$

Pour la balle m_2, la vitesse initiale est $3v$, ce qui nous donne

$$z_{2,\,\max} = \frac{9v^2}{2g} = 9h.$$

Alternativement, on peut faire usage de la conservation de l'énergie mécanique. Par exemple, pour la balle de masse m_2 :

$$\frac{1}{2}m_2 v_{f,2}'^2 = \frac{1}{2}m_2(3v)^2 = m_2 g z_{2,\,\max},$$

d'où on trouve immédiatement

$$z_{2,\,\max} = \frac{9v^2}{2g} = 9h.$$

On considère maintenant le cas où le choc entre les deux balles est mou. Les vitesses finales des deux balles sont donc égales, et nous les notons $v'_{f,1} = v'_{f,2} \equiv v'_f$.

2.a) Le raisonnement est similaire au cas des chocs élastiques, mais l'énergie mécanique n'est pas conservée au cours du choc mou. La conservation de la quantité de mouvement s'écrit maintenant

$$m_1 v - m_2 v = (m_1 + m_2) v'_f,$$

d'où l'on tire

$$v'_f = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh}$$

2.b) Pour que les balles partent vers le haut, il faut que la vitesse v'_f soit positive, et donc que $m_1 > m_2$. Si $m_1 = m_2$, les balles restent au sol.

2.c) Si $m_1 \gg m_2$, la vitesse finale $v'_f = v$. Par la conservation de l'énergie mécanique pendant la phase de remontée, on trouve

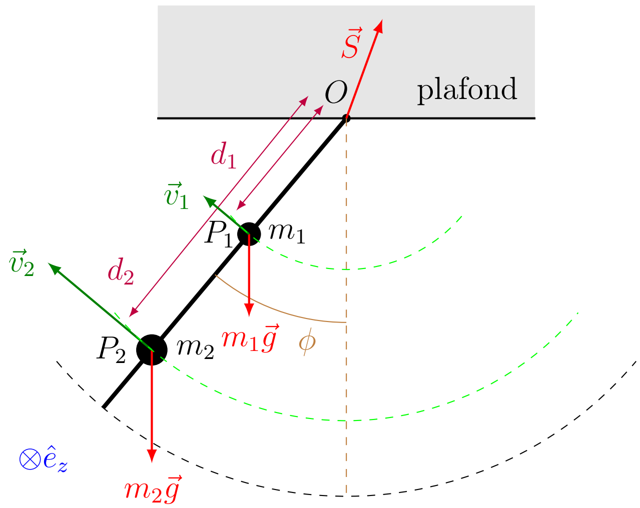
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = (m_1 + m_2) g z_{\max},$$

et donc

$$z_{\max} = \frac{v^2}{2g} = h.$$

3 Pendule à deux masses

Le système considéré ("tige + masse m_1 + masse m_2") est soumis à trois forces extérieures : les poids $m_1\vec{g}$ et $m_2\vec{g}$, ainsi qu'une force de soutien $\vec{S}$ au niveau du point d'attache O, dont la direction est a priori inconnue (point fixe = 3 contraintes = 3 composantes inconnues de forces de liaison) :



Le moment de la force $\vec{S}$ par rapport au point O est nul :

$$\vec{M}_O(\vec{S}) = \overrightarrow{OO} \wedge \vec{S} = \vec{0}\,.$$

Dans un repère cylindrique $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z)$, les moments dus aux poids s'écrivent quant à eux, toujours par rapport au point O,

$$\begin{aligned}
\vec{M}_O(m_1\vec{g}) &= \overrightarrow{OP_1} \wedge m_1\vec{g} = -m_1 g d_1 \sin\phi\,\hat{e}_z \\
\vec{M}_O(m_2\vec{g}) &= \overrightarrow{OP_2} \wedge m_2\vec{g} = -m_2 g d_2 \sin\phi\,\hat{e}_z\,.
\end{aligned}$$

Remarquons que la somme de ces deux moments est bien égale au moment du poids total du système "pendule" appliqué au centre de masse G :

$$\begin{aligned}
\vec{M}_O\big((m_1+m_2)\vec{g}\big) &= \overrightarrow{OG} \wedge (m_1+m_2)\vec{g} \\
&= -\frac{d_1 m_1 + d_2 m_2}{m_1+m_2}(m_1+m_2) g \sin\phi\,\hat{e}_z \\
&= -(d_1 m_1 + d_2 m_2) g \sin\phi\,\hat{e}_z\,.
\end{aligned}$$

D'autre part, le moment cinétique du pendule par rapport au point O a pour expression

$$\begin{aligned}
\vec{L}_O &= \vec{L}_{O,m_1} + \vec{L}_{O,m_2} = \overrightarrow{OP_1} \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{OP_2} \wedge m_2\vec{v}_2 \\
&= d_1 m_1 v_1\,\hat{e}_z + d_2 m_2 v_2\,\hat{e}_z = d_1 m_1 d_1 \dot{\phi}\,\hat{e}_z + d_2 m_2 d_2 \dot{\phi}\,\hat{e}_z \\
&= \left(m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2\right)\dot{\phi}\,\hat{e}_z\,.
\end{aligned}$$

On applique alors le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

$$\Rightarrow \quad \left(m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2\right)\ddot{\phi}\,\hat{e}_z = -(m_1 d_1 + m_2 d_2) g \sin\phi\,\hat{e}_z\,.$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\phi} + \omega_0^2 \sin\phi = 0\,,$$

avec

$$\omega_0^2 = \frac{(m_1 d_1 + m_2 d_2)}{(m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)}\, g \,.$$

On reconnaît l'équation différentielle donnant l'évolution du pendule simple. Pour $\phi \ll 1$ le mouvement est harmonique de pulsation ω_0.
Remarque : Le préfacteur devant g dans l'expression de ω_0 peut s'écrire

$$\frac{m_{\mathrm{tot}}\, d_G}{I_O}$$

où d_G est la distance du centre de masse du système par rapport à O et I_O est le moment d'inertie du système par rapport à O, que nous introduirons prochainement en cours.