

Série 11 : Systèmes de points matériels, collisions

Exercices d'introduction

A Questions conceptuelles

1. Lorsque Yaroslava Mahuchikh a battu le record du monde féminin de saut en hauteur en 2024 à Paris, en passant la barre placée à 2.10 m, est-ce que son centre de masse a obligatoirement dépassé cette hauteur ? Quelle était la trajectoire du centre de masse ?
2. On lâche une balle qui rebondit de manière parfaitement élastique sur le sol. Sa quantité de mouvement est-elle conservée ? Comment est-ce possible ? Existe-t-il un système plus grand dans lequel la quantité de mouvement est conservée ?
3. Si vous laissez tomber un œuf sur le sol, il se brisera, alors que si vous le laissez tomber (de la même hauteur) sur un matelas il ne se brisera pas. Expliquez pourquoi, en utilisant les notions de force et de durée du choc.

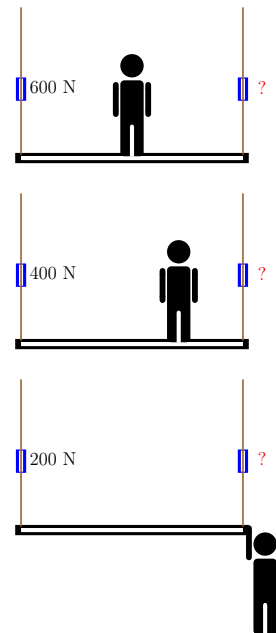
B Firmin le peintre

Quand Firmin, le peintre, est au milieu de sa nacelle, le dynamomètre de gauche indique 600 N, qu'indique alors celui de droite ?

S'il ne se tient pas au milieu de la nacelle et que le dynamomètre de gauche indique 400 N, qu'indique alors celui de droite ?

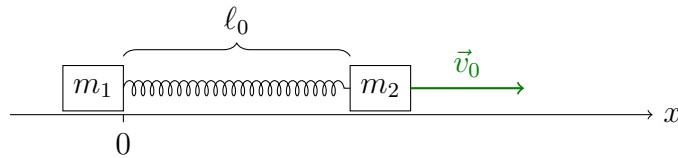
Comme le câble est bloqué, Firmin décide de descendre de sa nacelle par la droite. Juste avant que Firmin ne lâche le câble de droite, le dynamomètre de gauche indique 200 N, qu'indique alors celui de droite ?

Et maintenant, déterminer le poids de Firmin et le poids de la nacelle.



C Problème à deux corps

Soit deux chariots de masses m_1 et m_2 qui peuvent glisser sans frottement sur un rail horizontal. Initialement, le premier est à l'arrêt et le second en mouvement avec une vitesse $\vec{v}_0$. Ils sont reliés par un ressort de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0 . La déformation initiale du ressort est nulle.



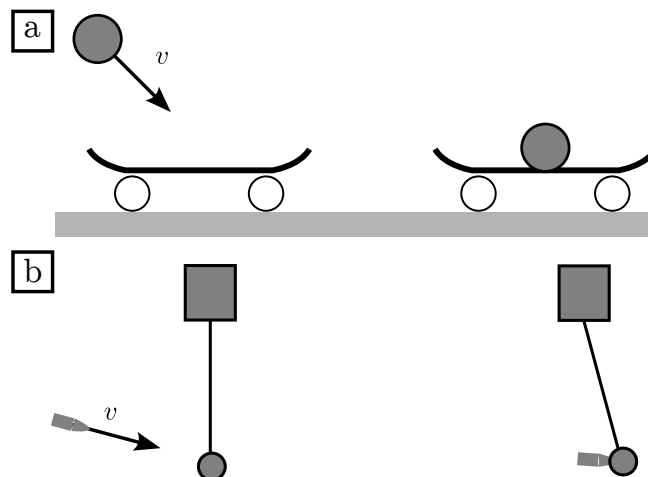
1. Sans faire de calcul, décrire qualitativement
 - (a) le mouvement du centre de masse du système formé des deux chariots
 - (b) le mouvement relatif des chariots (écart entre eux)
 - (c) le mouvement de chacun des chariots.
2. Ecrire les équations du mouvement
 - (a) de chacun des chariots
 - (b) du centre de masse
 - (c) du mouvement relatif.

D Collisions avec contraintes

Considérez les deux collisions suivantes, parfaitement inélastiques :

1. a) Une boule adhésive est lancée en direction d'une planche de skate, et reste collée à la planche.
2. b) Une balle est tirée en direction d'une cible pendue par un fil, et s'enfonce dans la cible.

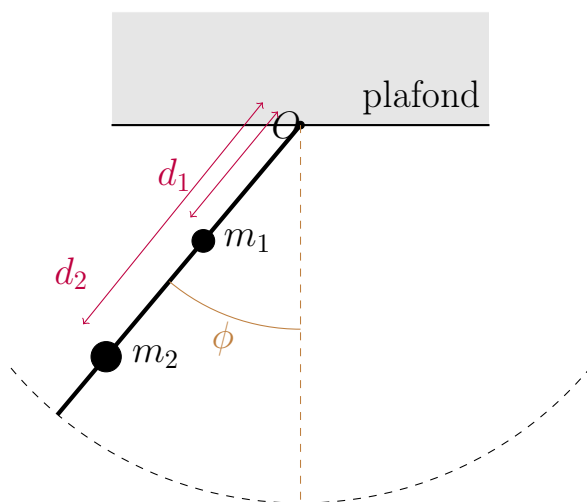
La quantité de mouvement du système "projectile + cible" est-elle conservée lors des deux collisions ? Y a-t-il d'autres quantités conservées ? On négligera les forces de frottement.



Problèmes

1 Pendule à deux masses [** 20 min]

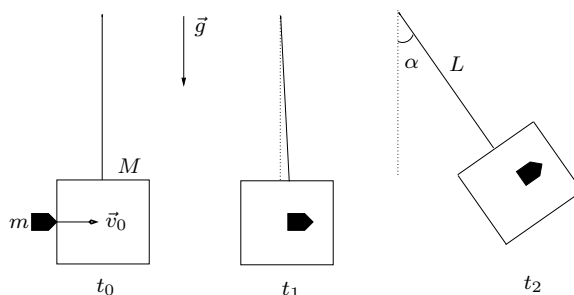
On considère un pendule attaché au plafond en un point O . Le pendule est constitué de deux masses m_1 et m_2 fixées sur une tige rigide de masse négligeable et de longueur d . La tige peut tourner librement autour de O et les masses se trouvent à des distances d_1 et d_2 de ce point.



A l'aide du théorème du moment cinétique, déterminer l'équation du mouvement de ce pendule donnant l'évolution de l'angle ϕ . A quelle condition le mouvement est-il harmonique? Quelle est alors la pulsation propre?

2 Pendule balistique (collision) [** 25 min]

Un bloc en bois de masse M , suspendu à un fil de longueur L , est initialement immobile. Au temps t_0 , une balle de fusil de masse m et de vitesse horizontale $\vec{v}_0$ arrive sur le bloc. Elle pénètre dans le bloc et s'immobilise dans ce dernier au temps t_1 . Sous l'effet de ce choc, le bloc se met à osciller tel un pendule. On mesure l'angle α de déviation maximale du fil par rapport à la verticale au temps t_2 .



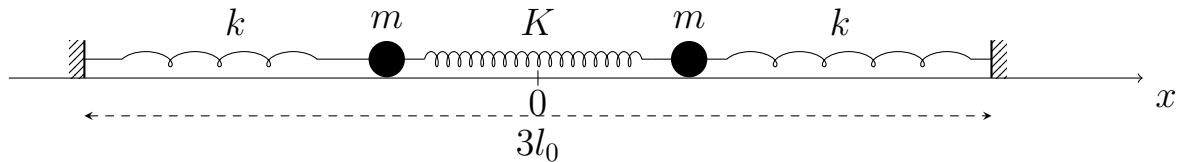
On considère que le choc a une durée tellement courte qu'on peut faire l'approximation

que la balle et le bloc ont tous deux des mouvements horizontaux entre les instants t_0 et t_1 .

- L'énergie mécanique et la quantité de mouvement totales du système balle+bloc sont-elles conservées entre les instants t_0 et t_1 ? Donner les deux justifications.
- L'énergie mécanique et la quantité de mouvement totales du système balle+bloc sont-elles conservées entre les instants t_1 et t_2 ? Donner les deux justifications.
- Déterminer la vitesse initiale $\vec{v}_0$ de la balle en fonction de m , M , L et α .
- Calculer les travaux suivants et donner explicitement leur signe :
 - le travail W^{balle} des forces s'exerçant sur la balle au cours du choc,
 - le travail W^{bloc} des forces s'exerçant sur le bloc au cours du choc,
 - le travail W total des forces internes sur le système formé de la balle et du bloc.

3 Oscillateur couplé [** 30 min]

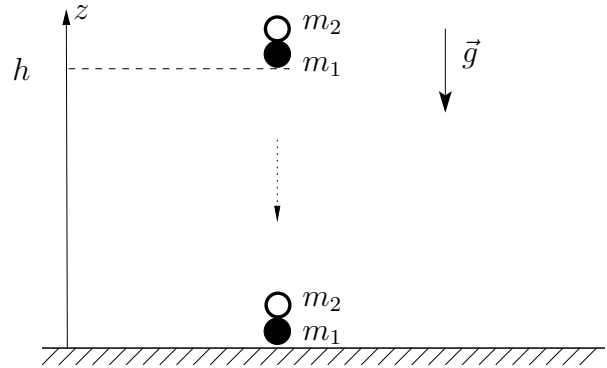
Deux points matériels de même masse m se déplacent en ligne droite, sans frottements, sur un rail horizontal (voir dessin). Ils sont attachés entre eux par un ressort de raideur K . De plus, chacun des points matériels est attaché à un point fixe par un autre ressort, de raideur k . Les trois ressorts sont de longueurs à vide l_0 , et les points fixes sont séparés d'une distance $3l_0$.



- Calculer les forces appliquées par les ressorts sur chaque masse, en fonction de la position des masses.
- Ecrire les équations du mouvement de chacun des points matériels.
- En déduire les équations du mouvement du centre de masse et de la coordonnée relative du système des deux points matériels.
- Calculer les solutions des équations du mouvement, et trouver la solution pour chacun des points matériels.
- Décrire le mouvement des deux masses pour les deux cas particuliers suivants : 1) la coordonnée relative est constante ; 2) le centre de masse est au repos.

4 Rebond de deux balles [*** 30 min]

On lâche, sans vitesse initiale, deux balles de masses m_1 et m_2 , l'une au-dessus de l'autre depuis une hauteur h . On fait l'hypothèse que, pendant leur chute, les balles restent en contact jusqu'à ce qu'elles rebondissent sur le sol. La situation peut-être décrite comme un choc élastique entre la balle m_1 et le sol, suivi immédiatement d'un choc entre les deux balles. Le rayon des balles est négligeable par rapport à h . Il n'y a pas de frottement de l'air.



Répondre aux questions ci-dessous dans les cas : (1) où le choc entre les deux balles est élastique, et (2) où le choc entre les deux balles est mou.

- Calculer la vitesse de chaque balle juste après le rebond.
- Quelle doit être la relation entre m_1 et m_2 pour que les deux balles repartent vers le haut ? Pour que m_1 reste immobile sur le sol ?
- A quelle hauteur rebondit chacune des deux balles dans le cas où $m_1 \gg m_2$?

Elements de réponse :

Exercice 1 : $\omega_0^2 = \frac{(m_1 d_1 + m_2 d_2)}{(m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)} g$

Exercice 2 : Le travail total $W = W^{\text{balle}} + W^{\text{bloc}}$ est égal à $W = -\frac{M}{m}(m+M)gL(1-\cos\alpha)$.

Exercice 3 : Le mouvement des points matériels, $x_1(t)$ et $x_2(t)$, est donné par

$$x_1(t) = A_G \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_G\right) - \frac{1}{2}A_u \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t + \phi_u\right) - \frac{l_0}{2},$$

et

$$x_2(t) = A_G \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_G\right) + \frac{1}{2}A_u \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t + \phi_u\right) + \frac{l_0}{2}.$$

où A_G, A_u, ϕ_G, ϕ_u dépendent des conditions initiales.

Voir aussi la démonstration interactive : <https://austinpeel.github.io/coupled-oscillations/>

Exercice 4 :

- Vitesses finales dans un choc élastique :

$$v'_{f,1} = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2}v \quad ; \quad v'_{f,2} = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v$$

Hauteur maximale quand $m_1 \gg m_2$:

$$z_{1,\max} = h \quad ; \quad z_{2,\max} = 9h.$$

- Vitesse finale dans un choc mou :

$$v'_f = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh}$$

Hauteur maximale quand $m_1 \gg m_2$:

$$z_{\max} = \frac{v^2}{2g} = h.$$