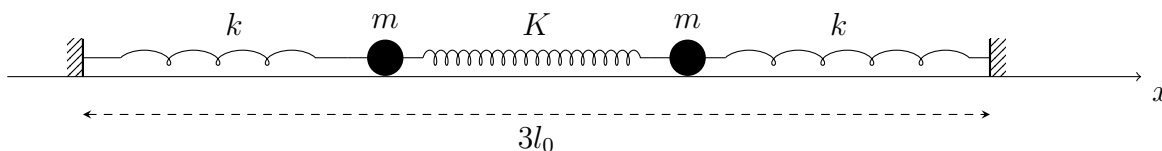


## Série 11 : Systèmes de points matériels, collisions

### 1 Oscillateur couplé

Deux points matériels de même masse  $m$  se déplacent en ligne droite, sans frottements, sur un rail horizontal (voir dessin). Ils sont attachés entre eux par un ressort de raideur  $K$ . De plus, chacun des points matériels est attaché à un point fixe par un autre ressort, de raideur  $k$ . Les trois ressorts sont de longueurs à vide  $l_0$ , et les points fixes sont séparés d'une distance  $3l_0$ .

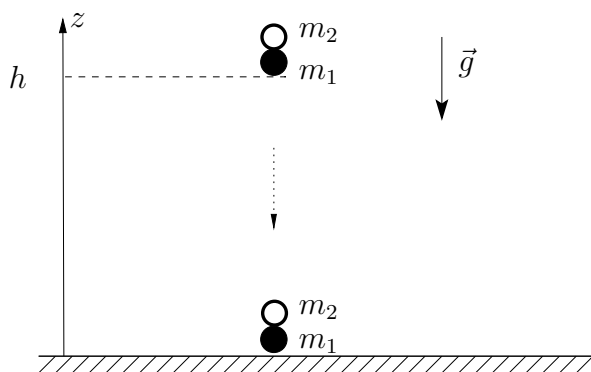


- Ecrire les équations du mouvement de chacun des points matériels.
- En déduire les équations du mouvement du centre de masse et de la coordonnée relative du système des deux points matériels.
- Calculer les solutions des équations du mouvement, et trouver la solution pour chacun des points matériels.
- Décrire le mouvement des deux masses pour les deux cas particuliers suivants : 1) la coordonnée relative est constante ; 2) le centre de masse est au repos.

### 2 Rebond de deux balles

On lâche, sans vitesse initiale, deux balles de masses  $m_1$  et  $m_2$ , l'une au-dessus de l'autre depuis une hauteur  $h$ . On fait l'hypothèse que, pendant leur chute, les balles restent en contact jusqu'à ce qu'elles rebondissent sur le sol. La situation peut-être décrite comme un choc élastique entre la balle  $m_1$  et le sol, suivi immédiatement d'un choc entre les deux balles. Le rayon des balles est négligeable par rapport à  $h$ . Il n'y a pas de frottement de l'air.

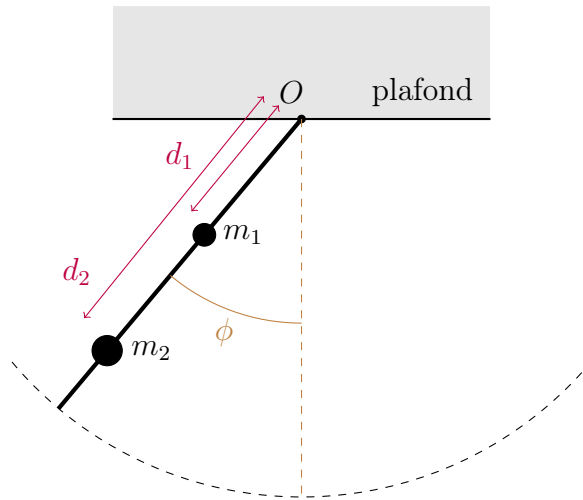
Répondre aux questions ci-dessous dans les cas : (1) où le choc entre les deux balles est élastique, et (2) où le choc entre les deux balles est mou.



- Calculer la vitesse de chaque balle juste après le rebond.
- Quelle doit être la relation entre  $m_1$  et  $m_2$  pour que les deux balles repartent vers le haut ? Pour que  $m_1$  reste immobile sur le sol ?
- A quelle hauteur rebondit chacune des deux balles dans le cas où  $m_1 \gg m_2$  ?

### 3 Pendule à deux masses

On considère un pendule attaché au plafond en un point  $O$ . Le pendule est constitué de deux masses  $m_1$  et  $m_2$  fixées sur une tige rigide de masse négligeable et de longueur  $d$ . La tige peut tourner librement autour de  $O$  et les masses se trouvent à des distances  $d_1$  et  $d_2$  de ce point.



A l'aide du théorème du moment cinétique, déterminer l'équation du mouvement de ce pendule donnant l'évolution de l'angle  $\phi$ . A quelle condition le mouvement est-il harmonique ? Quelle est alors la pulsation propre ?

### 4 Suggestion d'annale d'examen : Pendule balistique (collision)

Voir <https://exoset.epfl.ch/resources/pendule-balistiqueJWW2> ou sur Moodle

## Elements de réponse :

Exercice 1 : Le mouvement des points matériels,  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ , est donné par

$$x_1(t) = A_G \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_G \right) - \frac{1}{2} A_u \cos \left( \sqrt{\frac{k+2K}{m}} t + \phi_u \right) - \frac{l_0}{2},$$

et

$$x_2(t) = A_G \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_G \right) + \frac{1}{2} A_u \cos \left( \sqrt{\frac{k+2K}{m}} t + \phi_u \right) + \frac{l_0}{2}.$$

où  $A_G, A_u, \phi_G, \phi_u$  dépendent des conditions initiales.

Voir aussi la démonstration interactive : <https://austinpeel.github.io/coupled-oscillations/>

Exercice 2 :

- Vitesses finales dans un choc élastique :

$$v'_{f,1} = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} v \quad ; \quad v'_{f,2} = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v$$

Hauteur maximale quand  $m_1 \gg m_2$  :

$$z_{1,\max} = h \quad ; \quad z_{2,\max} = 9h.$$

- Vitesse finale dans un choc mou :

$$v'_f = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh}$$

Hauteur maximale quand  $m_1 \gg m_2$  :

$$z_{\max} = \frac{v^2}{2g} = h.$$

Exercice 3 :  $\omega_0^2 = \frac{(m_1 d_1 + m_2 d_2)}{(m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)} g$