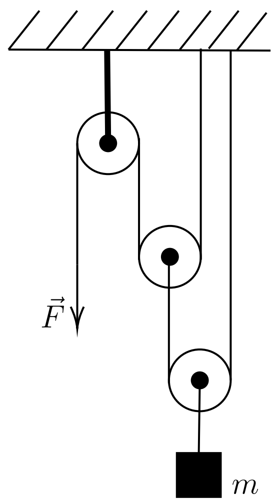
Série 10 : Sytèmes de points matériels et référentiels tournants

Exercices d'introduction

A Palan

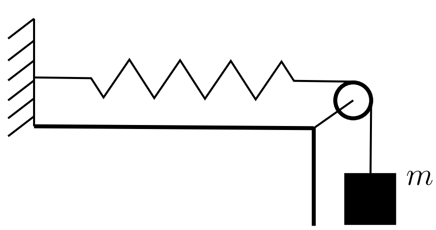
Considérons un système composé de deux poulies mobiles attachées à une poulie fixe (voir figure ci-dessous).



1. Determiner la force $\vec{F}$ nécessaire pour maintenir la masse m à l'équilibre.
2. En déduire $\vec{F}$ quand le palan est composé de N poulies mobiles.

B Poulie attachée à un ressort

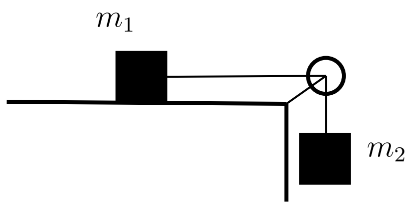
On considère une masse m immobile attachée à un ressort, de raideur k et de longueur à vide nulle, par une poulie.



Déterminer l'allongement du ressort. On suppose que la poulie transmet les forces sans perte.

1 La chute de Constantibloc [* 15 min]

On considère le montage suivant :

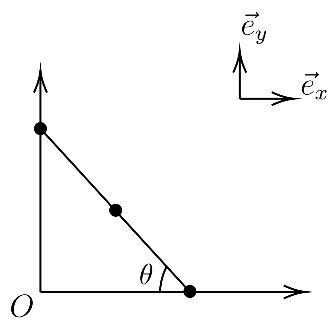


La poulie est sans masse et sans frottements. Le bloc de masse m_1 a un coefficient de frottement statique μ_s et dynamique $\mu_c < \mu_s$ avec la table.

1. Quelle est, en fonction de m_1, la valeur maximale de m_2 telle que le système puisse rester immobile ?
2. Pour cette valeur limite on suppose qu'une petite secousse met le système en mouvement. Quelle est alors l'accélération de m_1 et la tension dans la corde en fonction de m_1 ?
3. Déterminer la tension du fil dans le cas où le système ne subit aucun frottement.

2 Barre inclinée [** 20 min]

Trois masses m sont attachées à une barre (de masse négligeable) comme sur la figure ci-dessous. Les deux extrémités de la barre sont appuyées respectivement sur un mur et sur le sol. Si μ_s est le coefficient de frottement statique entre la barre et ces deux surfaces, quel est l'angle θ_c à partir duquel la barre commence à glisser ?

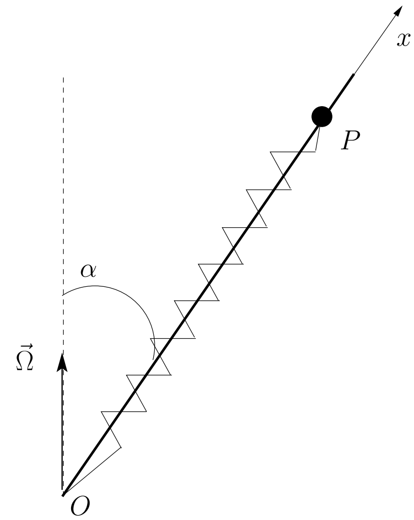


3 Point matériel dans un référentiel tournant [** 30 min]

Un point matériel P, de masse m et soumis à la pesanteur, peut coulisser sans frottement sur une tige T, d'extrémité O et formant un angle α avec la verticale. La tige tourne autour le l'axe vertical à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ constante. Le point P est attaché à l'extrémité d'un ressort, de longueur à vide l_0 et de raideur k, enfilé sur la tige et dont l'autre extrémité est fixée en O. La position du point P est repérée par sa coordonnée $x(t)$ mesurée sur la tige par rapport au point O.

a) Dans le référentiel lié à la tige, énumérer les forces exercées sur le point P, et écrire l'équation du mouvement selon x. A quel type de mouvement correspond cette équation ?

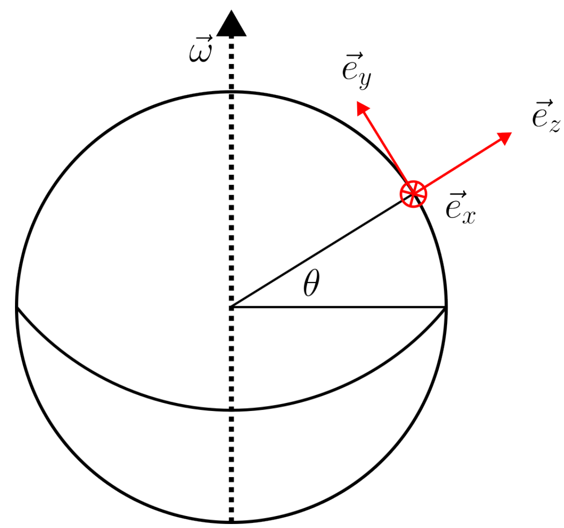
b) Montrer qu'il existe une position d'équilibre x_{eq} du point P sur la tige, et calculer cette position. Que vaut la position d'équilibre dans les cas limites suivants : $k \to \infty$, $\Omega = 0$, et $\alpha = \pi/2$.



4 Déviation vers l'est [*** 1h sans le complément]

Dans cet exercice, on considère l'effet de la force de Coriolis sur la chute d'un objet sur Terre. Cet effet fut mis en évidence de manière expérimentale en 1833 par Ferdinand Reich (1799–1882), qui mesura la déviation sur une chute d'une hauteur de 158 m.

On lâche sans vitesse initiale un objet de masse m depuis la surface de la Terre, dans un puit de profondeur H. On négligera les frottements, ainsi que les variations de l'accélération de la pesanteur avec l'altitude. On prendra par contre en compte la rotation de la terre à la vitesse angulaire ω. On notera θ la latitude du puit.



a) Quelles sont les forces qui s'exercent sur l'objet si l'on se place dans le référentiel associé à la surface de la Terre. Les représenter.

b) Comparer l'amplitude de la force centrifuge et de la force de gravité. Dans le reste de l'exercice, on négligera la plus petite de ces deux forces.

c) Dans un premier temps, on ne considère que la partie de la force de Coriolis engendrée par la vitesse verticale de l'objet. Ecrire les équations du mouvement.

d) Montrer que sous ses hypothèses, la déviation vers l'est après une chute de longeur h est donnée par

$$x = \frac{1}{3}\omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} \cos\theta.$$

e) Application numérique : calculer la déviation vers l'est mesurée par Ferdinand Reich. La mine se trouvait en Saxonie (latitude $50 \deg 53'$). Calculer la vitesse maximale de la masse. Commenter sur l'approximation faite en c).

Compléments de cours, hors programme

f) Maintenant, nous ne négligeons plus le changement de direction de la vitesse du mobile. Par contre, au vu des résultats, nous continuons de négliger dans le calcul des forces le changement de latitude. Par simplicité (ce n'est plus vraiment rigoureux), nous continuons aussi de négliger la force centrifuge. Etablir les équations du mouvement du mobile.

g) En dérivant l'équation du mouvement sur l'axe est-ouest, montrer que la vitesse de l'objet est donnée par

$$\dot{x}(t) = \frac{g\cos\theta}{2\omega}(1-\cos 2\omega t)$$

En déduire $x(t)$.

h) En utilisant le résultat précédent, en déduire $y(t)$ et $z(t)$.

i) On donne $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ et $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ pour $|x| \ll 1$. Vérifier que l'on retrouve les formules de la question d). L'objet est-il dévié vers le sud ou vers le nord ? De combien ? Ferdinant Reich avait trouvé une déviation de $0.4cm$. Est-ce compatible ?

Données : rayon de la Terre : $6370km$, accélération gravitationnelle $g = 9.81ms^{-2}$.

Elements de réponse

Exercice 1 : $T = \mu_s m_1 g \frac{1+\mu_c}{1+\mu_s}$

Exercice 2 : $\theta_c = \arctan\left(\frac{1-\mu_s^2}{2\mu_s}\right)$

Exercice 3 : La position d'équilibre est donnée par

$$x_{eq} = \frac{kl_0 - mg\cos\alpha}{k - m\Omega^2\sin^2\alpha}\,. \tag{1}$$